令和 7（2025）年度
学習院大学大学院
自然科学研究科・物理学専攻
博士前期課程
試験区分（一般･夏季）
入学試験問題

9:00～12:00	13:30～15:00
物理学	英語

2025年度
自然科学研究科物理学専攻博士前期課程
入学試験問題（物理学）

注意

・この冊子は、この表紙も含めて７ページある。落丁等があれば申し出ること。

・６題の中から３題を選んで解答せよ。

・理論物理学の研究室（井田研、宇田川研、田崎研）を（第一志望、第二志望を問わず）志望する受験生は、かならず第１問を選択の中に含めること（この指示に従わなかった場合は自動的に不合格となる。また、試験場で志望研究室を変更することはできない）。

・問題ごとに解答用紙を分けて使うこと。

・解答用紙の裏面を使う場合は、その旨を明記すること。

・解答用紙が足りなくなった場合は、申告して追加解答用紙を受け取ること。

1. 静止した電子 (質量 m) に振動数 ν の光子が衝突し, 散乱される過程を特殊相対論の枠組みで考える. 以下の問に答えよ. ただし, プランク定数を h, 光速を c とする.

(a) 振動数 ν の光子のエネルギー, 運動量の大きさはそれぞれどのようにあらわすことができるか.

(b) 電子の全エネルギー E, 運動量の大きさ p, 質量 m の間にはどのような成り立つ関係式が成り立つか.

(c) 衝突前の光子, 電子の 4 元運動量をそれぞれ

$$\left(\frac{h\nu}{c}, \frac{h\nu}{c}, 0, 0\right), \quad (mc, 0, 0, 0)$$

衝突後の光子, 電子の 4 元運動量をそれぞれ

$$\left(\frac{h\widetilde{\nu}}{c}, \frac{h\widetilde{\nu}}{c}\cos\theta, \frac{h\widetilde{\nu}}{c}\sin\theta, 0\right), \quad \left(\frac{E}{c}, p\cos\phi, -p\sin\phi, 0\right)$$

とする. ただし, E, p はそれぞれ, 衝突後の光子のエネルギー, 運動量の大きさである. この衝突過程における エネルギーと運動量の保存則を書きあらわせ.

(d) 問 (b), (c) で求めた 4 つの関係式から, p, ϕ, E を消去することにより, $\widetilde{\nu}^{-1} - \nu^{-1}$ を, 光子の散乱角 θ の関数としてあらわせ.

(e) 衝突後の電子の全エネルギー E を ν, θ の関数としてあらわせ.

2. 水平と $\beta(0 < \beta < \pi/2)$ の角をなす斜面がある。斜面上の原点 O から，斜面と垂直に交わる鉛直面内で、斜面と α の角をなす方向に質点を速さ v_0 で投射する。$0 < (\alpha + \beta) < \pi/2$ である。投げ上げた時刻を $t = 0$ として，物体が斜面に落下する時刻を t_1 とする。

質点の質量を m，重力加速度を g とし，以下の問いに答えよ。

(a) 斜面にそって x 軸、斜面に垂直上向きに y 軸を取ったとき，物体の x 成分と y 成分の運動方程式をそれぞれ書け。

(b) t_1 を求めよ。

(c) t_1 における物体の速度の x 成分を求めよ。

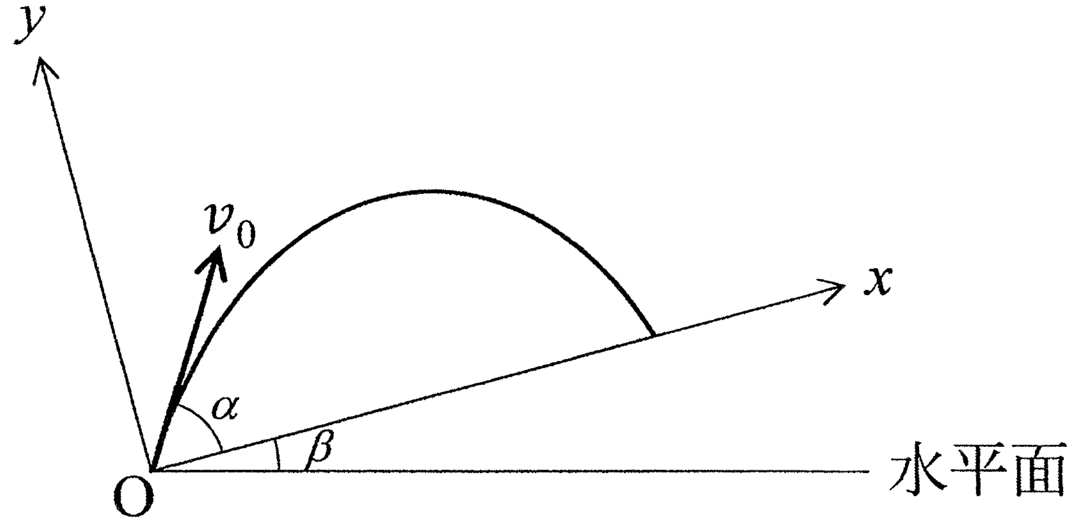
(d) t_1 における斜面上の到達距離 l を求めよ。答えは g，v_0，α，β で表すこと。

(e) 質点を斜面に垂直に落下させる投射角を α_1 とする。$\tan\alpha_1$ を β で表せ。

(f) α_1 で投射したとき、落下に要する時間を求めよ。答えは g，v_0，β で表し，三角関数として $\sin\beta$ のみを用いる形にまとめること。

(g) l が最大となるときの到達距離を L とする。そのときの投射角を α_2 とする．α_2 を β で表せ。

(h) L を求めよ。



3.

太さの無視できる細い導線を1回巻いた2つのコイルC_1，C_2を固定して設置し，それぞれに電流I_1，I_2を流した．
それぞれのコイル上の位置を$\vec{r}_1$，$\vec{r}_2$とし，真空の透磁率をμ_0とする．

(a) 位置$\vec{r}_1$での電流素片$I_1 \mathrm{d}\vec{l}_1$による位置$\vec{r}_2$における磁束密度$\mathrm{d}\vec{B}_{21}$をビオ・サバールの法則に従って表せ．

(b) コイルC_2の電流素片$I_2 \mathrm{d}\vec{l}_2$が(a)で求めた磁束密度から受ける力$\mathrm{d}\vec{F}_{21}$を求めよ．

コイルC_1，C_2の相互インダクタンスL_{21}は以下で表せる．

$$L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}\vec{l}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{l}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

(c) コイルC_2に働く力$\vec{F}_{21}$を相互インダクタンスL_{21}を用いて表せ．

(d) 2つのコイルによる磁場のエネルギーU_mを自己インダクタンスL_{11}，L_{22}と相互インダクタンスL_{21}を用いて表せ．

(e) コイルに働く力$\vec{F}$を磁場のエネルギーU_mを用いて表せ．

4. 答案には結果だけでなく考えの筋道も書きなさい。問題に与えられていない記号が必要な時は定義して用いること。

ハミルトニアンが $\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$ で与えられる質量 m, 角振動数 ω の一次元調和振動子を考える。位置演算子と運動量演算子は $\hat{x}, \hat{p}$ で表され, 交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を満たす。任意の量子状態において, 位置と運動量の標準偏差 (平均値との差の 2 乗平均平方根)σ_x, σ_p の間には不確定性関係 $\sigma_x\sigma_p \geq \frac{|[\hat{x},\hat{p}]|}{2}$ が成り立つ。ここで, $\hbar$ はプランク定数 h を 2π で除したものである。また, 生成演算子を $\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}$, 消滅演算子を $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}$, 数演算子 $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ に対する固有ベクトルを $|n\rangle$, 固有値を n とする。ここで, n は非負の整数であり, $|n\rangle$ は完全規格直交系をなす。

以下の問いに答えよ。

(1)$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ を求めよ。

(2)$\hat{\mathcal{H}}$ を $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ を用いて記述し, $|n\rangle$ に対するエネルギー固有値を求めよ。

(3)$\hat{a}|n\rangle$ が $\hat{n}$ の固有ベクトルであり, その固有値が $n-1$ であることを示せ。

(4)$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ と表すことができることを示せ。

(5)$\langle n|\hat{x}|n\rangle$ と $\langle n|\hat{p}|n\rangle$ を求めよ。

(6)$\langle n|\hat{x}^2|n\rangle$ と $\langle n|\hat{p}^2|n\rangle$ を求めよ。

(7) 基底状態 $|0\rangle$ において, 位置と運動量の標準偏差の積が, 不確定性原理から定まる最小値と等しくなることを示せ。

5. 磁場中に配置された正四面体の頂点にある4つのスピン $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ がお互いに相互作用する系を考える。各スピンは $\sigma_j = \pm 1$ の二つの値を取るイジングスピンとみなす。系のハミルトニアンは次のように書けるものとする。

$$\mathcal{H} = J \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \sigma_i \sigma_j - h \sum_{j=1}^{4} \sigma_j$$

この系が温度 T のもとで熱平衡にあるとする。ボルツマン定数を k_{B}、逆温度を $\beta = \frac{1}{k_{\mathrm{B}} T}$ とし、以下の問に答えよ。

I まず磁場がかかっていない場合 $(h = 0)$ について考える。

(a) $J < 0$ のとき基底状態のスピン配置を全て挙げ、そのエネルギーを求めよ。

(b) $J > 0$ のとき基底状態のスピン配置を全て挙げ、そのエネルギーを求めよ。

(c) 温度 T におけるエネルギー E の熱平衡期待値 $\langle E \rangle$ を求めよ。

II 磁場 h の効果について考える。

(d) 磁化を $M = \sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_3 + \sigma_4$ と定義する。M の熱平衡期待値 $\langle M \rangle$ から定義される帯磁率 $\chi \equiv \lim_{h \to 0} \frac{\langle M \rangle}{h}$ を求め、$J < 0, J > 0$ それぞれの場合について横軸を T として図示せよ。

6. 導体中の自由電子による電気伝導を考える。導体中において電子は何らかの散乱体によって散乱され、散乱後の電子の運動は散乱前とは全く無関係でランダムであるため、電場がない場合電子の平均速度 $\langle \boldsymbol{v} \rangle$ はゼロとなる。一方、電場 $\boldsymbol{E}$ の下では電子は散乱と散乱の間に電場によって加速されるため、電場と逆方向に平均速度 $\langle \boldsymbol{v} \rangle$ で運動する。このとき生じる電気伝導が従うオームの法則

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$$

について考える。ここで $\boldsymbol{j}$ は電流密度、σ は電気伝導率を表す。電子を質量 m、電荷 $-e$ の粒子として以下の問いに答えよ。

(a) 電子が散乱を受けないと仮定した場合の電場 $\boldsymbol{E}$ の下での電子の運動を表す運動方程式を求めよ。また、これから電子の平均速度 $\langle \boldsymbol{v} \rangle$ の時間変化を与える微分方程式を求めよ。

(b) 電子に対する散乱の効果を抵抗力 $-m\langle \boldsymbol{v} \rangle/\tau$ として取り入れ、電場 $\boldsymbol{E}$ の下で散乱がある場合の電子の平均速度 $\langle \boldsymbol{v} \rangle$ の時間変化を与える微分方程式を求めよ。ここで τ は散乱から次の散乱までの平均時間を表す。また平均速度の時間変化がゼロとなる定常状態において、電子の平均速度 $\langle \boldsymbol{v} \rangle_s$ が電場 $\boldsymbol{E}$ に比例することを示せ。

(c) 電流密度とはどのように定義されるか説明せよ。またその定義から電流密度が $\langle \boldsymbol{v} \rangle_s$ を使って $\boldsymbol{j} = -ne\langle \boldsymbol{v} \rangle_s$ と与えられることを説明せよ。ここで n は導体中の電子密度を表す。

(d) (b) と (c) の結果から電気伝導率 σ を e、m、n、τ を使って表せ。

(e) 300 K における銅の電気伝導率 σ は $\sigma = 0.67 \times 10^8\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ である。これから電子が自由に動くことのできる距離（平均自由行程）を求め、電子は何によって散乱されているか説明せよ。必要であれば次の値を用いても良い。$e = 1.6 \times 10^{-19}$ C、$m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg、$n = 8.5 \times 10^{22}\ 1/\mathrm{cm}^3$、フェルミ速度 $v_\mathrm{F} = 1.6 \times 10^6$ m/s、銅の原子間距離 3.6 Å。

次に、磁場 $\boldsymbol{B}$ をかけたときの電気伝導を考える。磁場下ではローレンツ力によって電子の軌道は曲げられ、電流と磁場に共に垂直な方向に電場が現れる。この現象をホール効果とよぶ。以下では電流を x 方向に流し、磁場を z 方向にかけている状況を考える。

(f) 電場 $\boldsymbol{E}$、磁場 $\boldsymbol{B}$ の下で散乱がある場合の電子の運動を表す運動方程式を求めよ。

(g) (f) の運動方程式をベクトルの成分で表すと、定常状態においてホール電場 E_y は磁場 B_z と電流密度 j_x の積に比例することを示し、その比例係数（ホール係数）R_H を求めよ。

（注意）・答案は必ず提出すること。　・太線内は必ず記入すること。　　学習院大学大学院

課程	博士前期課程	研究科	自然科学研究科	専攻	物理学専攻	受験番号		氏名	フリガナ	
									漢字	
試験科目	2025年度 物理学			備考	解答用紙			採点欄		

（注意）・答案は必ず提出すること。 ・太線内は必ず記入すること。　　　学習院大学大学院

課程	博士前期課程	研究科	自然科学研究科	専攻	物理学専攻	受験番号		氏名	フリガナ	
									漢字	
試験科目	2025年度 物理学			備考	解答用紙			採点欄		

（注意）・答案は必ず提出すること。・太線内は必ず記入すること。

学習院大学大学院

課程	博士前期課程	研究科	自然科学研究科	専攻	物理学専攻	受験番号		氏名	フリガナ	
									漢字	
試験科目	2025年度 物　理　学			備考	解　答　用　紙			採点欄		

（注意）・答案は必ず提出すること。・太線内は必ず記入すること。　　学習院大学大学院

課程	博士前期課程	研究科	自然科学研究科	専攻	物理学専攻	受験番号		氏名	フリガナ	
									漢字	
試験科目	2025年度 物理学			備考	解答用紙			採点欄		

(注意）・答案は必ず提出すること。　・太線内は必ず記入すること。

学習院大学大学院

課程	博士前期課程	研究科	自然科学研究科	専攻	物理学専攻	受験番号		氏名	フリガナ 漢字	
試験科目	2025年度 物　理　学			備考	解答用紙			採点欄		

（注意）・答案は必ず提出すること。 ・太線内は必ず記入すること。 学習院大学大学院

課程	博士前期課程	研究科	自然科学研究科	専攻	物理学専攻	受験番号		氏名	フリガナ	
									漢字	
試験科目	2025年度 物理学			備考	解答用紙			採点欄		