

令和 7 (2025) 年度  
学習院大学大学院  
自然科学研究科・数学専攻  
博士前期課程  
試験区分 (一般・夏季)  
入学試験問題

| 9:00～12:00 | 13:30～15:00 |
|------------|-------------|
| 数学         | 英語          |

2025 年度  
学習院大学大学院

自然科学研究科 博士前期課程 数学専攻  
(夏季募集)

入学試験問題  
数 学

2024 年 7 月 6 日

---

次の問題のうち、**1**、**2**には必ず答えなさい。さらに、**3**、**...**、**8**から2問選択し、計4問について解答しなさい。

---

以下では、 $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  はそれぞれ整数全体、有理数全体、実数全体の集合を表すこととする。

**1** 以下の問に答えよ。

(1) 実数  $a$  に対して、4 次正方行列  $A$  を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 1 & a \\ 1 & -1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a-1 \\ a & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

と定める。  $A$  が正則とならない  $a$  の値をすべて求めよ。

(2) 複素数  $k$  に対して、3 次正方行列  $B$  を

$$B = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

と定める。

(2-1)  $B$  が対角化不可能であるような  $k$  の値をすべて求めよ。

(2-2)  $B$  が対角化不可能であるようなそれぞれの  $k$  の値に対して、 $B$  のジョルダン標準形を求めよ。ただし、 $P^{-1}BP$  がジョルダン標準形となるような正則行列  $P$  を求める必要はない。

2 以下の問に答えよ.

(1) べき級数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n+2}$$

の収束半径を求めよ.

(2) 次の等式が成り立つ定数  $a$  を求めよ.

$$\int_0^1 (x-a) \operatorname{Arctan} x \, dx = 0$$

(3)  $\mathbb{R}^2$  上の関数

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^6 - x^3 y, \\ \varphi(x, y) &= 2x^4 - 2xy + y^2 \end{aligned}$$

を考える.

(3-1) 条件  $\varphi(x, y) = 0$  の下での関数  $f(x, y)$  の停留点をすべて求めよ.

(3-2) 条件  $\varphi(x, y) = 0$  の下で関数  $f(x, y)$  の極値を与える点のうち、原点以外のものをすべて求めよ.

- 3  $k$  を体とすると、 $0$  でない  $k$  の元全体からなる乗法群を  $k^\times$  で表す。  
2以上の自然数  $p$  に対して、 $\mathbb{Q}^\times$  の部分集合

$$G_p = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a \not\equiv 0 \pmod{p}, b \not\equiv 0 \pmod{p} \right\},$$

$$H_p = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \not\equiv 0 \pmod{p} \right\}$$

を考える。

- (1)  $G_p$  が  $\mathbb{Q}^\times$  の部分群であるためには、 $p$  が素数であることが必要十分であることを示せ。
- (2)  $\sigma : \mathbb{Q}^\times \rightarrow \mathbb{Q}^\times/G_p$  を自然な全射とする。 $p$  が素数のとき、剰余群  $\mathbb{Q}^\times/G_p$  は  $\sigma(p)$  を生成元とする無限巡回群であることを示せ。
- (3)  $p$  が素数のとき、剰余群  $G_p/H_p$  は  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$  と同型であることを示せ。ただし、 $H_p$  が  $G_p$  の部分群であることは認めてよい。

- 4  $a$  を実数とし、商環

$$A = \mathbb{R}[x, y]/(xy - 1),$$

$$B_a = \mathbb{R}[x, y, z]/(z - (x^2 - y^2), z - (ax + 2y - 3))$$

を考える。

- (1)  $A$  は整域であることを示せ。
- (2)  $B_4$  が整域でないことを示せ。さらに、 $B_4$  の零因子を一つ求めよ。
- (3)  $B_a$  が整域となるための  $a$  の条件を求めよ。さらに、 $B_a$  が整域ならば、 $A$  に同型であることを示せ。

5 実数値関数  $y = y(x)$  に対して,

$$y' = \frac{dy(x)}{dx}, y'' = \frac{d^2y(x)}{dx^2}$$

と表したとき,  $y$  に関する以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1)  $y'' - 5y' + 6y = 0$

(2)  $y'' - 2y' - e^x \sin x = 0$

6 測度空間  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  上で定義された実数値可測関数  $f, g$  と可測集合  $A \in \mathcal{F}$  について,

$$\int_A |f(x) - g(x)| \mu(dx) = 0$$

ならば, 集合  $A$  上ほとんどいたるところ  $f = g$  であることを示せ.

7  $\mathbb{R}$  に通常位相を入れて,  $\mathbb{R}$  上の同値関係  $\sim$  を,  $x, y \in \mathbb{R}$  に対して

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

として定める.  $X = \mathbb{R}/\sim$  をこの同値関係による商空間とする.

(1)  $X$  はハウスドルフ空間かどうか, 理由とともに答えよ.

(2)  $X$  はコンパクトであるかどうか, 理由とともに答えよ.

8 関数

$$F(x, y, z) = 18(x^2 + y^2) - (z^2 + 2)^2$$

によって曲面  $S$  を

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$$

と定め,  $S$  上の点  $p = (1, 1, 2)$  をとる.

(1) 点  $p$  における  $S$  の接平面  $H_p$  の方程式を求めよ.

(2) 可微分写像  $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を

$$G(x, y, z) = \left( \frac{2y}{1+z^2}, \frac{2x}{1+z^2}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+z^2}} \right)$$

によって定め, 写像  $G$  の  $S$  への制限を  $g$  と表す.  $g$  は写像  $g: S \rightarrow S$  を定めることを示せ.

(3) 点  $p$  における  $S$  の接空間を  $T_p S$  と表す.  $T_p S$  を接平面  $H_p$  と同一視して, 接空間  $T_p S$  の基底を2つの接ベクトル

$$e_1 = \left( 1, 0, \frac{3}{4} \right), e_2 = \left( 0, 1, \frac{3}{4} \right)$$

によって与える. (2) の写像  $g$  によって  $q = g(1, 1, 2)$  と定め, 点  $q$  における接空間  $T_q S$  についても  $T_p S$  と同様にして

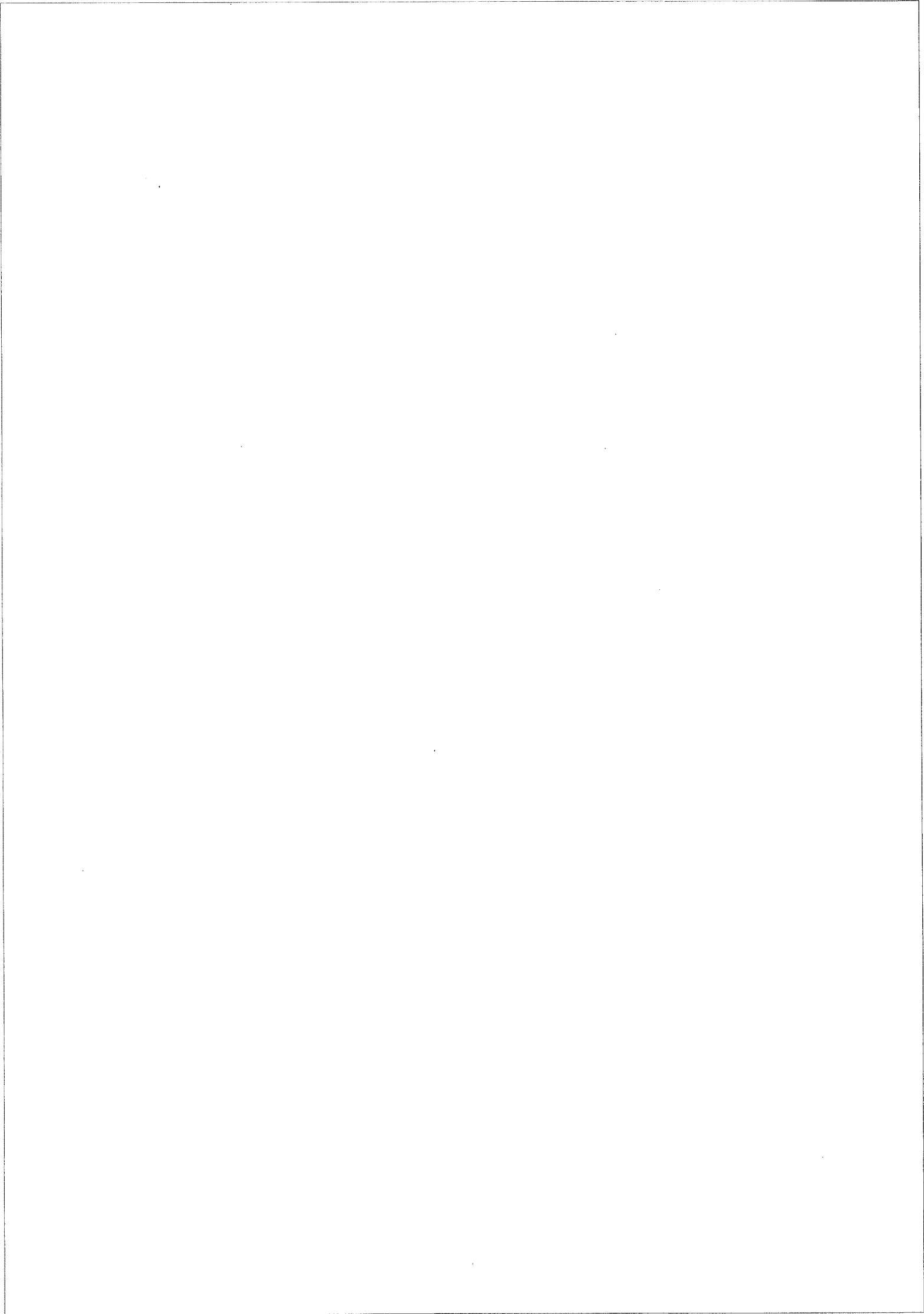
$$f_1 = \left( 1, 0, \frac{3\sqrt{10}}{4} \right), f_2 = \left( 0, 1, \frac{3\sqrt{10}}{4} \right)$$

によって基底を与える. このとき  $g$  の微分写像  $(dg)_p: T_p S \rightarrow T_q S$  について,  $(dg)_p(e_1), (dg)_p(e_2)$  をそれぞれ  $f_1, f_2$  を用いて表せ.

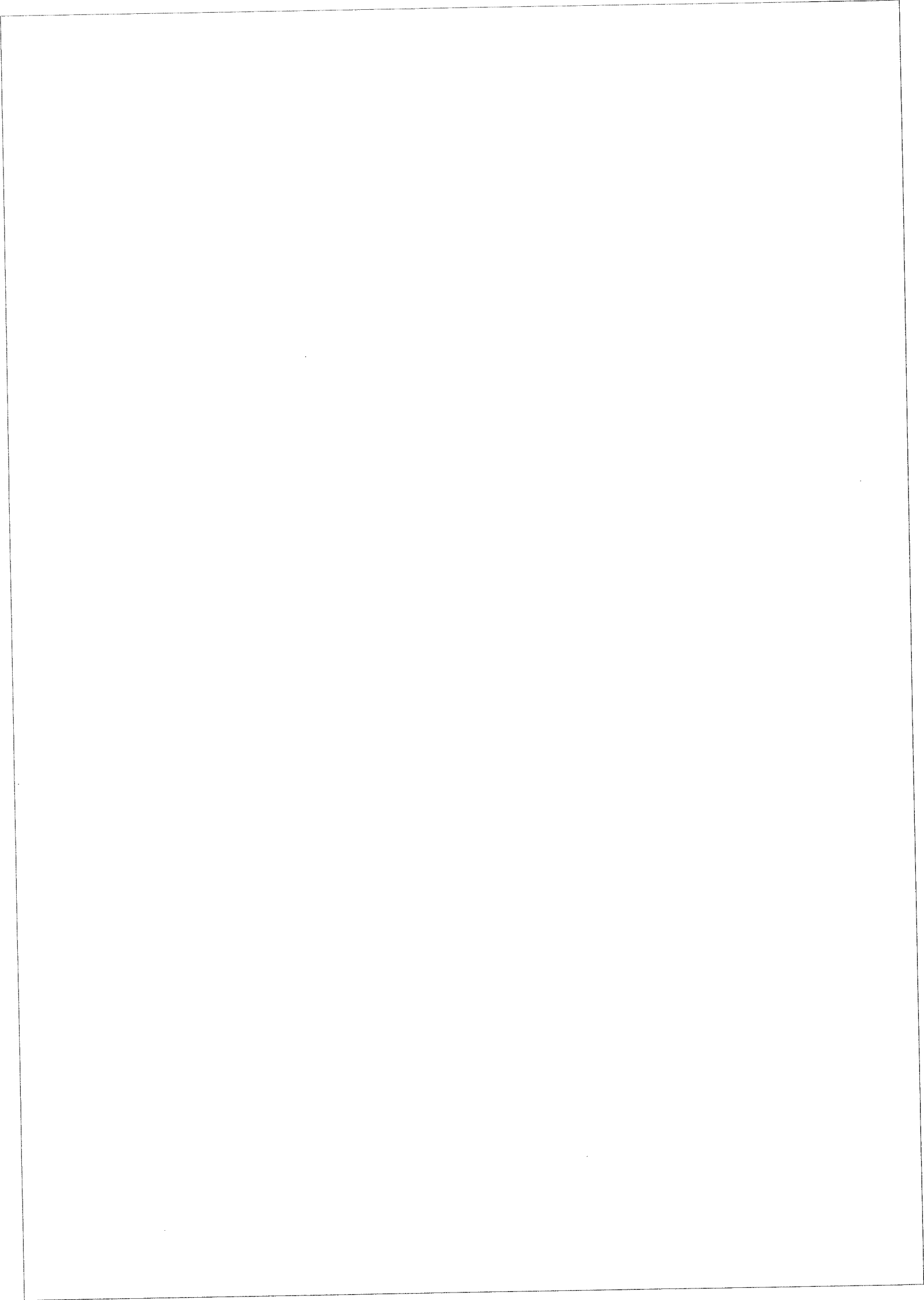
|              |        |     |             |        |      |          |  |        |             |  |
|--------------|--------|-----|-------------|--------|------|----------|--|--------|-------------|--|
| 課<br>程       | 博士前期課程 | 研究科 | 自然科学<br>研究科 | 専<br>攻 | 数学専攻 | 受験<br>番号 |  | 氏<br>名 | フリ<br>ガナ    |  |
|              |        |     |             |        |      |          |  |        | 漢<br>字      |  |
| 試験<br>科目     | 2025年度 |     |             |        | 備考   | 解 答 用 紙  |  |        | 採<br>点<br>欄 |  |
| <div>問</div> |        |     |             |        |      |          |  |        |             |  |



|              |        |     |         |    |      |         |  |     |      |  |
|--------------|--------|-----|---------|----|------|---------|--|-----|------|--|
| 課程           | 博士前期課程 | 研究科 | 自然科学研究科 | 専攻 | 数学専攻 | 受験番号    |  | 氏名  | フリガナ |  |
|              |        |     |         |    |      |         |  | 漢字  |      |  |
| 試験科目         | 2025年度 |     |         |    | 備考   | 解 答 用 紙 |  | 採点欄 |      |  |
| <div>問</div> |        |     |         |    |      |         |  |     |      |  |



|              |        |     |         |    |      |         |  |     |      |  |
|--------------|--------|-----|---------|----|------|---------|--|-----|------|--|
| 課程           | 博士前期課程 | 研究科 | 自然科学研究科 | 専攻 | 数学専攻 | 受験番号    |  | 氏名  | フリガナ |  |
|              |        |     |         |    |      |         |  | 漢字  |      |  |
| 試験科目         | 2025年度 |     |         |    | 備考   | 解 答 用 紙 |  | 採点欄 |      |  |
| <div>問</div> |        |     |         |    |      |         |  |     |      |  |



(注意)・答案は必ず提出すること。・太線内は必ず記入すること。

学習院大学大学院

|                  |        |             |             |        |      |          |         |        |             |  |
|------------------|--------|-------------|-------------|--------|------|----------|---------|--------|-------------|--|
| 課<br>程           | 博士前期課程 | 研<br>究<br>科 | 自然科学<br>研究科 | 専<br>攻 | 数学専攻 | 受験<br>番号 |         | 氏<br>名 | フリ<br>ガナ    |  |
|                  |        |             |             |        |      |          |         |        | 漢<br>字      |  |
| 試<br>験<br>科<br>目 | 2025年度 |             |             |        |      | 備<br>考   | 解 答 用 紙 |        | 採<br>点<br>欄 |  |
| <div>問</div>     |        |             |             |        |      |          |         |        |             |  |

