令和 7（2025）年度
学習院大学大学院
自然科学研究科・数学専攻
博士前期課程
試験区分（一般・春季）
入学試験問題

9:00～12:00	13:30～15:00
数　学	英　語

令和 7(2025)年度

学習院大学大学院

自然科学研究科　数学専攻

博士前期課程

一般入試

1 時限　**数学**

注意事項

1．机の上に置けるものは、鉛筆・シャープペンシル・ボールペン（黒又は青のみ）・消しゴム・時計・眼鏡・受験票です。携帯電話・スマートフォン・スマートウォッチ等の通信機器を時計として使用することは禁止します。

2．1 問につき解答用紙 1 枚を使用してください。

3．追加の解答用紙の使用を希望する場合は、申し出てください（2 枚まで可）。

2025年度
学習院大学大学院

自然科学研究科 博士前期課程 数学専攻
（春季募集）

入学試験問題

数　学

2025年2月17日

次の問題のうち，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ には必ず答えなさい．さらに，$\boxed{3}, \cdots, \boxed{8}$ から2問選択し，計4問について解答しなさい．

以下では，$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数全体の集合，有理数全体の集合，実数全体の集合，複素数全体の集合を表すこととする．

$\boxed{1}$

(1) a を実数とし，行列

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 & 2 \\ a+1 & 2a+1 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

を考える．線形写像 $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = M\boldsymbol{x}$ と置くことで定める．$f^{-1}(\boldsymbol{o})$ ($\boldsymbol{o}$ はゼロベクトル) が $\mathbb{R}^4$ の2次元部分ベクトル空間となるとき，a の値および f の像 $f(\mathbb{R}^4)$ の基底を一組求めよ．

(2) V を2次以下の複素数係数多項式全体からなる $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする：

$$V = \left\{ a + bx + cx^2 \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{C} \right\}.$$

$k \in \mathbb{C}$ に対して，線形変換 $\Gamma_k : V \to V$ を

$$\Gamma_k(f(x)) = \frac{d}{dx} f(x) + k f(x+1) \qquad (f(x) \in V)$$

で定める．

(2-1) V の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する Γ_k の表現行列 A_k を求めよ．

(2-2) Γ_k のジョルダン標準形及びそれを与える V の基底を求めよ．

2

(1) x, y, z を実数とする．$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の条件のもとで，$f(x, y, z) = x^3 + y^3 - z^3$ の停留値（臨界値）をすべて求めよ．

(2)

$$\iint_{\mathbb{R}^2} x^2 e^{-x^2-y^2} dxdy$$

を計算せよ．

3 整数 a に対して，

$$f(X) = X^3 + 3aX^2 + 3a^2X + 1$$

とおき，剰余環 $R = \mathbb{Q}[X]/(f(X))$ を考える．ただし，$\mathbb{Q}[X]$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の多項式環であり，$(f(X))$ は $f(X)$ が生成する $\mathbb{Q}[X]$ のイデアルを表す．

(1) R が体とならないような a をすべて求めよ．

(2) X が定める R の元を x とする $(x = X \bmod (f(X)))$．R が体であるとき，

$$\frac{1}{x+1} = ux^2 + vx + w$$

をみたす u, v, w を a を用いて表せ．

4 G を群とし，H を G の（正規とは限らない）部分群とする．$G \to G/H$, $g \mapsto \overline{g} = gH$ を自然な全射とする．いま，$x \in G$ に対して，写像

$$\pi_x : G/H \longrightarrow G/H$$

を，$\pi_x(\overline{g}) = \overline{xg}$ $(g \in G)$ によって定めたい．

(1) すべての $x \in G$ について，π_x は well-defined であることを示し，さらに全単射であることを示せ．

(2) G/H からそれ自身への全単射全体の作る（写像の合成を演算とする）群を S とするとき，$f(x) = \pi_x$ によって定義される写像

$$f : G \longrightarrow S$$

は準同型写像であることを示せ．

(3) f を前問で定めた準同型写像とする．H が G の正規部分群であるためには，$\mathrm{Ker}\, f = H$ が成り立つことが必要十分であることを示せ．

5

(1) 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \cos y$$

の一般解を求めよ.

(2) 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 3x$$

の解で，初期条件 $y(1) = 0$ を満たすものを求めよ.

6 $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ を測度空間，f, $f_n\,(n \geq 1)$ を可測関数とする.

(1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\int_X |f(x)|\mu(dx) \geq \varepsilon \cdot \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\})$$

が成り立つことを示せ.

(2) $0 < p < \infty$ とするとき

$$\int_X |f_n(x) - f(x)|^p \mu(dx) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

ならば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が成り立つことを示せ.

7 複素数平面上の曲線 C に沿った複素積分を

$$I_C = \int_C z\sqrt{z\bar{z}+1}dz$$

とする.

(1) 0 を始点として $1+i$ を終点とする線分を C_1 とする. 積分 I_{C_1} を求めよ.

(2) 0 を始点として実軸に沿って $\sqrt{2}$ へ移動し, その後円周 $|z| = \sqrt{2}$ 上を正の向きに移動して $1+i$ に至る曲線を C_2 とする. このとき, 積分 I_{C_2} の値を求めよ.

(3) C_2 と, C_1 を逆向きに移動する線分をつないで出来る閉曲線を C_3 とする. I_{C_3} を Green の定理を用いて重積分で表し計算せよ.

8 (X,d) を距離空間とする.

(1) $F \subset X$ を閉集合とし, $x \notin F$ とする.

(1-1) $\inf_{y\in F} d(x,y) > 0$ であることを示せ.

(1-2) さらに F がコンパクトならば, $d(x,z) = \inf_{y\in F} d(x,y)$ となる点 $z \in F$ が存在することを示せ.

(2) F_1, F_2 を X の閉集合で, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ とする. このとき,

$$\inf_{x\in F_1, y\in F_2} d(x,y) > 0$$

は常に成り立つか? 正しければ証明を与え, 正しくなければ反例を与えよ.

（注意）・答案は必ず提出すること。 ・太線内は必ず記入すること。

学習院大学大学院

課程	博士前期課程	研究科	自然科学研究科	専攻	数学専攻	受験番号		氏名	フリガナ	
試験科目	2025年度 数学			備考	解答用紙			採点欄	漢字	

問

（注意）・答案は必ず提出すること。 ・太線内は必ず記入すること。

学習院大学大学院

課程	博士前期課程	研究科	自然科学研究科	専攻	数学専攻	受験番号		氏名	フリガナ 漢字	
試験科目	2025年度 数　学			備考	解答用紙			採点欄		

問

（注意）・答案は必ず提出すること。 ・太線内は必ず記入すること。

学習院大学大学院

課程	博士前期課程	研究科	自然科学研究科	専攻	数学専攻	受験番号		氏名	フリガナ / 漢字	
試験科目	2025年度 数学			備考	解答用紙			採点欄		

問

（注意）・答案は必ず提出すること。 ・太線内は必ず記入すること。

学習院大学大学院

課程	博士前期課程	研究科	自然科学研究科	専攻	数学専攻	受験番号		氏名	フリガナ / 漢字
試験科目	2025年度 数学			備考	解答用紙			採点欄	

問

（注意）・答案は必ず提出すること。 ・太線内は必ず記入すること。　　学習院大学大学院

課程	博士前期課程	研究科	自然科学研究科	専攻	数学専攻	受験番号		氏名 フリガナ / 漢字	
試験科目	2025年度 数学			備考	追加解答用紙			採点欄	

問

（注意）・答案は必ず提出すること。 ・太線内は必ず記入すること。

学習院大学大学院

課程	博士前期課程	研究科	自然科学研究科	専攻	数学専攻	受験番号		氏名 フリガナ / 漢字	
試験科目	2025年度 数学			備考	追加解答用紙			採点欄	

問

解答例

1

(1) $\operatorname{rank} M = 2$ となる条件. 基本変形（列でも行でも可）で $a = 3$ と分かる. M の列の基本変形で，$\operatorname{Im} f$ の基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れることが分かる.

(2) (2-1) $f(x) = a + bx + cx^2$ に対して

$$\Gamma_k(f(x)) = (ka + (k+1)b + kc) + (kb + 2(k+1)c)x + kcx^2$$

と計算できて，$A_k = \begin{pmatrix} k & k+1 & k \\ 0 & k & 2(k+1) \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$.

(2-2) $(A_k - kE_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2(k+1)^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より，A_k の最小多項式は，$k = -1$ のとき $(t-k)^2$，$k \neq -1$ のとき $(t-k)^3$ である. $k = -1$ のとき，$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ によって $P^{-1}A_{-1}P = J_2(-1) \oplus J_1(-1)$，ジョルダン基底 $\{-1, x^2, x\}$ がとれる. $k \neq -1$ のとき，$P = \begin{pmatrix} 2(k+1)^2 & k & 0 \\ 0 & 2(k+1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって $P^{-1}A_kP = J_3(k)$，ジョルダン基底 $\{2(k+1)^2, k + 2(k+1)x, x^2\}$ がとれる.

2

(1)

解答例 ラグランジュの未定条数法を用いる。

$$F(x,y,z,\lambda) = x^3 + y^3 - z^3 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

とおいて、

$$\begin{aligned} F_x &= 3x^2 - 2\lambda x = x(3x - 2\lambda) = 0, \\ F_y &= 3y^2 - 2\lambda y = y(3y - 2\lambda) = 0 \\ F_z &= -3z^2 - 2\lambda z = -z(3z + 2\lambda) = 0, \\ F_\lambda &= -(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

を解けば停留点が得られる。$x = 0$ とすると、$y^2 + z^2 = 1$ なので、y または z は 0 でない。$y = 0$, $z \neq 0$ とすると、$z = \pm 1$, $f(0,0,\pm 1) = \pm 1$. $y \neq 0$ とすると、$\lambda = (2/3)y$. $z = 0$ なら $y = \pm 1$ で $f(0,\pm 1,0) = \pm 1$. $z \neq 0$ ならば $z = -(2/3)\lambda = -y$. $y^2 + z^2 = 1$ と合わせて、$y = \pm 1/\sqrt{2} = -z$, $f(0,\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/\sqrt{2}) = 0$ となる。

$x \neq 0$ とすると $\lambda = (3/2)x$. $y = 0$ ならば $z = -x$ で、やはり $x = \pm 1/\sqrt{2} = -z$, $f(\pm 1/\sqrt{2}, 0, \mp 1/\sqrt{2}) = 0$. $y \neq 0$ ならば $y = x$. $z = 0$ ならば $x = y = \pm 1/\sqrt{2}$ で $f(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}, 0) = \pm 1/\sqrt{2}$. $z \neq 0$ ならば $x = y = -z$, $x = y = -z = \pm 1/\sqrt{3}$, したがって $f(\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}, \mp 1/\sqrt{3}) = \pm 1/\sqrt{3}$.

結局、停留値は $0, \pm 1, \pm 1\sqrt{2}. \pm 1/\sqrt{3}$. 最小値は -1, 最大値は 1.

解答例 (2) 極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を用いて、

$$I_1 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (r\cos\theta)^2 e^{-r^2} r d\theta dr = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \int_0^\infty r^3 e^{-r^2} dr$$

それぞれ、

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\int_0^\infty r^3 e^{-r^2} dr = \frac{1}{2}\int_0^\infty s e^{-s} ds = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-s} ds = \frac{1}{2}$$

となり、$I_1 = \pi$ が得られる。

$\boxed{3}$

答え： (1) Rが体でないのは，$a=0,1$のみ．

(2) $u=\dfrac{1}{3a(a-1)}$, $v=\dfrac{3a-1}{3a(a-1)}$, $w=\dfrac{3a^2-3a+1}{3a(a-1)}$.

理由：

(1) $f(X)$が3次式なので，体にならない条件は，$f(X)$が有理数根を持つこと．さらに，$f(X)$がモニックなので，$f(X)$の有理数根の可能性は，$x=-1,1$だけ．$f(-1)=3a(1-a)$なので，$f(-1)=0$となるのは$a=0,1$である．また，$f(1)=3a^2+3a+2$なので，$f(1)=0$をみたす実数aは存在しない．以上のことから，答えが得られる．

(2) 等式

$$f(X)=(X+1)(X^2+(3a-1)X+3a^2-3a+1)-3a(a-1)$$

と$a\neq 0,1$より答えが得られる．

$\boxed{4}$

(1), (2)は下記

(3) $x\in \operatorname{Ker} f$ ならば，任意の $g\in G$ について $\pi_x(\overline{g})=\overline{g}$ だから $\overline{xg}=\overline{g}$，とくに $x\in H$，したがって一般に $\operatorname{Ker} f\subset H$ がいえる．よって，$H\triangleleft G \Leftrightarrow H\subset \operatorname{Ker} f$ を示せばよい．

$$\begin{aligned} H\triangleleft G &\iff g^{-1}xg\in H \quad (\forall x\in H, \forall g\in G)\\ &\iff xg\in gH \quad (\forall x\in H, \forall g\in G)\\ &\iff \pi_x(\overline{g})=\overline{g} \quad (\forall x\in H, \forall g\in G)\\ &\iff x\in \operatorname{Ker} f \quad (\forall x\in H)\\ &\iff H\subset \operatorname{Ker} f. \end{aligned}$$

(1)

Well-defined $g_1H=g_2H$のとき $xg_1H=xg_2H$ を示せばよい．一般に「$aH=bH \Leftrightarrow \exists h\in H,\ a=bh$」(☆)であることに注意すれば直ちに従う．

全単射

単射：$xg_1H=xg_2H \Rightarrow g_1H=g_2H$ を示す．上の☆より $xg_1H=xg_2H \Leftrightarrow \exists h\in H,\ xg_1=xg_2h$

左から x^{-1} をかければ $g_1=g_2h$ となる．よって☆より $g_1H=g_2H$ が成立する．

全射：任意の $\overline{g}=gH\in G/H$ に対して，$\pi_x(\overline{x^{-1}g})=\overline{x(x^{-1}g)}=\overline{g}$ より全射

(2) $x,y,g\in G$ に対して，$f(xy)(\overline{g})=\pi_{xy}(\overline{g})=\overline{(xy)g}=\overline{x(yg)}=\pi_x(\overline{yg})=\pi_x(\pi_y(\overline{g}))$
$=\pi_x\circ\pi_y(\overline{g})$

よって $f(xy)=\pi_x\circ\pi_y$ より fは準同型写像

解答例 (1) 変数分離法で解く：

$$\int \frac{dy}{\cos y} = \int dx = x + C$$

左辺の不定積分を、$t = \sin y$ と置いて置換積分する：

$$\int \frac{dy}{\cos y} = \int \frac{\cos y\, dy}{\cos^2 y} = \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{1-t} + \int \frac{dt}{1+t}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(-\log|1-t| + \log|1+t|) = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin y}{1-\sin y}\right|$$

したがって

$$\log\left|\frac{1+\sin y}{1-\sin y}\right| = 2x + 2C$$

であり、書き換えると、

$$\frac{1+\sin y}{1-\sin y} = Ce^{2x}$$

これでも良いが、y について解くと、

$$\sin y = \frac{Ce^{2x}-1}{Ce^{2x}+1}, \quad y = \arcsin\left(\frac{Ce^{2x}-1}{Ce^{2x}+1}\right)$$

という解が得られる。

(2) 斉次方程式：$\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = 0$ を解くと、

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}, \quad \log|y| = -\log|x| + C, \quad y = \frac{C}{x}$$

となるので、定数変化法で、$z = xy$ として

$$z' = xy' + y = 3x^2, \quad z = x^3 + C, \quad y = x^2 + \frac{C}{x}$$

となる。$y(1) = 0$ より $C = -1$ で、答えは

$$y = x^2 - \frac{1}{x}$$

解答例 (1) (チェビシェフの不等式) $\Omega_\varepsilon = \{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ と書くと、

$$\int_X |f(x)|\mu(dx) \geq \int_{\Omega_\varepsilon} |f(x)|\mu(dx) \geq \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon\mu(dx) = \varepsilon \cdot \mu(\Omega_\varepsilon).$$

(2) $|f_n(x) - f(x)|^p$ と ε^p について (1) の不等式を用いると、

$$\int_X |f_n(x) - f(x)|^p \mu(dx) \geq \varepsilon^p \cdot \mu\{x \in X \,|\, |f_x(x) - f(x)|^p \geq \varepsilon^p\}$$
$$= \varepsilon^p \cdot \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\})$$

であり、仮定より $n \to \infty$ のとき左辺は 0 に収束するから、右辺も 0 に収束する。$\varepsilon^p > 0$ であるから、これより結論が従う。

4

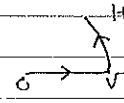
7.

(1) $C_1 : z(t) = t(1+i) \quad (0 \le t \le 1)$

$$I_1 = \int_0^1 (1+i)^2 t\sqrt{2t^2+1}\,dt = 2i\left[\frac{1}{4}\frac{2}{3}(2t^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= 2i\left(\frac{1}{6}3\sqrt{3} - \frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{i}{3}(3\sqrt{3}-1) = i\left(\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right)$$

(2) 

$$I_2 = \int_0^{\sqrt{2}} t\sqrt{t^2+1}\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}e^{i\theta}\sqrt{2+1}\,\sqrt{2}\,e^{i\theta}\cdot i\,d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{2}\frac{2}{3}(t^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{2}} + 2\sqrt{3}\,i\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2i\theta}\,d\theta$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}\right) + 2\sqrt{3}\,i\left[\frac{1}{2i}e^{2i\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{3} - \frac{1}{3} + \sqrt{3}\left(e^{\frac{\pi}{2}i} - 1\right)$$

$$= \sqrt{3} - \frac{1}{3} + \sqrt{3}\,i - \sqrt{3} = -\frac{1}{3} + \sqrt{3}\,i \quad //$$

(3) $$I_{C_2} = -\frac{1}{3} + \sqrt{3}\,i - \left(i\left(\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right)\right) = -\frac{1}{3} + \frac{i}{3}$$

$$z\sqrt{z\bar{z}+1} = (x+iy)\sqrt{x^2+y^2+1} = x\sqrt{x^2+y^2+1} + iy\sqrt{x^2+y^2+1}$$

$$\int_C (u+iv)(dx+idy) = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy$$

$$= \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

実部

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$$

$$\iint_D \frac{-2xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\,dxdy = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos\theta\sin\theta\,d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}}\,r\,dr \quad (t=r^2)$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\theta\,d\theta \cdot \int_0^2 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,\frac{1}{2}\,dt$$

$$\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

学習院大学理学部教学教室

5

$$\int_0^2 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\cdot\frac{1}{2}\,dt = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{T^2-1}{T}\,T\,dT = \int_1^{\sqrt{3}} (T^2-1)\,dT$$

$T=\sqrt{t+1}$

$T^2=t+1$

$dt=2T\,dT$

$$= \left[\frac{T^3}{3}-T\right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right)$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{(実部)} = -\frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

虚部

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{x^2+y^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2+1} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy = \iint_D \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2\theta-\sin^2\theta)\,d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}}\,r\,dr$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\,d\theta = \left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = +\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3}$$

$$= +\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = +\frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{合計} = -\frac{1}{3}+\frac{i}{3} = I_{C_3} \quad //$$

8

(a) (i) $\inf_{y\in F} d(x,y)=0$ とすると，定義から，F の点列 $\{y_i\}$ で $\lim_{i\to\infty} d(x,y_i)=0$ となるものが存在する．これは $\lim_{i\to\infty} y_i = x$ を導くが，F は閉集合なので，$x\in F$ となり，仮定に反する．

(ii) $\inf_{y\in F} d(x,y)=D$ とおき，F の点列 $\{y_i\}$ で，$\lim_{i\to\infty} d(x,y_i)=D$ となるものをとる．F はコンパクトという仮定なので，$\{y_i\}$ は部分列を取れば，収束するので，その極限を y とすれば，$d(x,y)=D$.

(b) 正しくない．

$X=\mathbb{R}^2$ で d を通常の距離とすれば，$F_1=\{(x,y)|y=0\}, F_2=\{(x,y)\mid xy=1\}$ とすると，$F_1\cap F_2=\emptyset$ だが，$\inf_{x\in F_1, y\in F_2} d(x,y)=0$ である．