

令和 8（2026）年度
学習院大学大学院
自然科学研究科 物理学専攻
博士前期課程
試験区分（一般・夏期）
入学試験問題

9:00～12:00	13:30～15:00
物理学	英語

2026年度

自然科学研究科物理学専攻博士前期課程

入学試験問題（物理学）

注意

- ・この冊子は、この表紙も含めて7ページある。落丁等があれば申し出ること。
- ・6題の中から3題を選んで解答せよ。
- ・理論物理学の研究室（井田研、宇田川研、田崎研）を（第一志望、第二志望を問わず）志望する受験生は、かならず第1問を選択の中を含めること（この指示に従わなかった場合は自動的に不合格となる。また、試験場で志望研究室を変更することはできない）。
- ・問題ごとに解答用紙を分けて使うこと。
- ・解答用紙の裏面を使う場合は、その旨を明記すること。
- ・解答用紙が足りなくなった場合は、申告して追加解答用紙を受け取ること。

1.

真空中に異なる n 個の点 $x_1, x_2, \dots, x_n$ をとり, 2 点 x_i, x_j の間の距離を r_{ij} とあらわす. これらの各点にそれぞれ電荷が $q_1, q_2, \dots, q_n$ であたえられる荷電粒子をおいた. 以下ではこれらの荷電粒子のことを電荷 $q_1, \dots, q_n$ などとよぶ.

- (a) 点 x_i において, それ以外の点におかれた電荷すべてのつくる電位を v_i とするとき, v_i の表式を書け. ただし, 電位の原点は無限遠にとり, 真空の誘電率を ϵ_0 とする.
- (b) この電荷配置の静電エネルギーの表式を, $q_1, \dots, q_n, v_1, \dots, v_n$ を用いてあらわせ.

点 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の各点にそれぞれ電荷 $q'_1, q'_2, \dots, q'_n$ をおいた. 電荷 q'_i 以外のすべての電荷が点 x_i につくる電位を v'_i とする.

- (c) 等式

$$q_1 v'_1 + q_2 v'_2 + \dots + q_n v'_n = q'_1 v_1 + q'_2 v_2 + \dots + q'_n v_n$$

が成り立つことをしめせ.

真空中に n 個の導体球を固定する. 各導体にそれぞれ $Q_1, \dots, Q_n$ の電荷をあたえたとき, 導体球の電位はそれぞれ $V_1, \dots, V_n$ となった.

- (d) この電荷分布による静電エネルギーの表式を書け.

上の各導体球にそれぞれ $Q'_1, \dots, Q'_n$ の電荷をあたえたとき, 導体球の電位はそれぞれ $V'_1, \dots, V'_n$ となった.

- (e) 等式

$$Q_1 V'_1 + Q_2 V'_2 + \dots + Q_n V'_n = Q'_1 V_1 + Q'_2 V_2 + \dots + Q'_n V_n$$

が成り立つことをしめせ.

2. 水平面と $\alpha (\alpha > 0)$ の角をなす斜面上の一点 O から、斜面と垂直に交わる鉛直面内で、斜面と $\beta (\beta > 0)$ の角をなす上方に質点を投射する。但し $0 < (\alpha + \beta) < \pi/2$ である。

図のように、斜面にそって上方に x 軸、それに垂直に上方に y 軸をとる (x 軸と y 軸は斜面と垂直に交わる鉛直面内にある)。摩擦や空気による抵抗は考えない。

重力加速度を g 、質点と斜面の反発係数を e 、質点の初速を V とし、以下の問いに答えよ。解答に必要な記号があれば定義して用いよ。

(a) 質点の x 成分と y 成分の運動方程式をそれぞれ書け。

O から投げ上げた質点が最初に斜面に落下した点を P_1 とする。

(b) 質点が P_1 に落下する直前と直後の y 軸方向に沿った速度をそれぞれ求めよ。

(c) O から P_1 までの質点の飛行時間を求めよ。

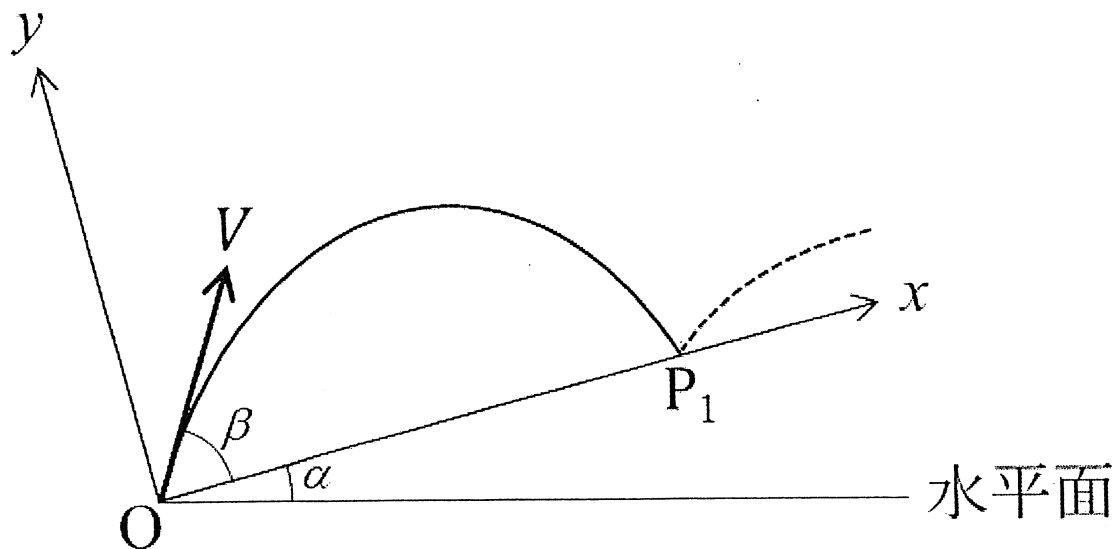
反発運動を繰り返し、質点が k 回目に斜面に落下した点を P_k とする (P_1 は一回目に落下した点である)。また P_k に落下した直後の y 軸方向に沿った質点の速度を v_k とする。

(d) P_k から P_{k+1} までの飛行時間を g, α, v_k で表せ。

(e) O から質点を投射した時刻を $t = 0$ として、質点の反発運動が止まるまでの時間を g, V, α, β, e で表せ。

(f) 質点が O にもどったときに反発運動が止まる条件は $\tan \alpha \tan \beta = 1 - e$ である。これを示せ。

(g) 質点が n 回目の落下で O にもどる条件を求めよ。



3. 半径 R_1 の球内に球対称に電荷が分布しており、球の中心からの距離が r の場所の電荷密度 $\rho(r)$ は次式で表される.

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 \frac{r}{R_1} & r \leq R_1 \\ 0 & R_1 < r \end{cases} \quad (1)$$

(a) 球内外の電場 $\vec{E}(\vec{r})$ を求めなさい.

(b) 式 (1) の電荷分布が持つ静電エネルギーを求めなさい.

次に、半径 R_1 の球と中心を共有する半径 R_2 の球もあり ($R_2 > R_1$), 2つの球面の間の電荷密度が $-\rho_0$ であるとする. すなわち、球の中心からの距離が r の場所の電荷密度 $\rho(r)$ が次式で表されるとする.

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 \frac{r}{R_1} & r \leq R_1 \\ -\rho_0 & R_1 < r \leq R_2 \\ 0 & R_2 < r \end{cases} \quad (2)$$

(c) 電荷分布が式 (2) で表されるとき、各領域の電場 $\vec{E}(\vec{r})$ を求めなさい.

(d) 式 (2) の電荷分布が持つ静電エネルギーを求めなさい.

以下では、球の中心からの距離が R_2 よりも大きい場所の電場がゼロのときを考える.

(e) 上記の条件が満たされるとき、 R_1 と R_2 の間に成り立つ関係式を答えなさい.

(f) 上記の条件が満たされるとき、式 (2) の電荷分布が持つ静電エネルギーを R_1 を用いずに表しなさい.

4. 1次元の半無限区間 $[0, \infty)$ を運動する質量 m の量子力学的な粒子がある。この系のエネルギー固有状態のシュレディンガー方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) + V(x) \varphi(x) = E \varphi(x) \quad (1)$$

である。位置変数 x は $x \geq 0$ の範囲を動く。波動関数は境界条件 $\varphi(0) = 0$ を満たし、 $x \uparrow \infty$ では $\varphi(x) \rightarrow 0$ となる。ポテンシャルは、

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a; \\ V_0, & x > a \end{cases} \quad (2)$$

である。 a は正の定数であり、 V_0 は以下に指定するように無限大あるいは正の定数である。

まず、 V_0 が無限に大きい状況を考える。

- (a) エネルギー固有状態とエネルギー固有値をすべて求めよ。エネルギー固有状態の波動関数は規格化すること。

次に、 V_0 は正で有限の定数とする。

- (b) $0 \leq x \leq a$ と $x > a$ それぞれの領域でのエネルギー固有状態の波動関数を求め、 $x = a$ での接続条件を考慮して、エネルギー固有値を決定するための条件を導け。必要ならグラフも描くこと。エネルギー固有状態の波動関数を規格化する必要はない。
- (c) V_0 を小さくしていった際、エネルギー固有状態はつねに存在するか、それとも、 V_0 が小さいと存在しなくなるかを答えよ。後者の場合には、エネルギー固有状態が存在しなくなる限界の V_0 を求めよ。
- (d) 逆に V_0 が大きいとき、エネルギー固有状態のおおよその個数を求めよ。

5. 一辺の長さが L である、体積 $V \equiv L^3$ の立方体の箱の中に閉じ込められた N 個の相互作用しない電子からなる系について考える。系には z 方向に大きさ h の磁場がかけられており、一電子のエネルギーは

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) - h\sigma_z \quad (1)$$

で与えられる。ここで周期的境界条件を考えて、波数 k_α は n_α を任意の整数として、 $k_\alpha = \frac{2\pi n_\alpha}{L}$ ($\alpha = x, y, z$) の値を取る。また、 σ_z は z 方向のスピン固有値を表し $\sigma_z = \pm 1$ の値を取る。

I グランドカノニカル分布を用いてこの系の熱力学量を議論する。温度 T 、化学ポテンシャル μ のもとで系は熱平衡にあるとする。ボルツマン定数を k_B 、逆温度を $\beta = \frac{1}{k_B T}$ として次の問いに答えよ。

(a) 系の大分配関数 Z が次式で与えられることを説明せよ。

$$Z = \prod_{\mathbf{k}} (1 + e^{-\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - h - \mu)})(1 + e^{-\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} + h - \mu)}). \quad (2)$$

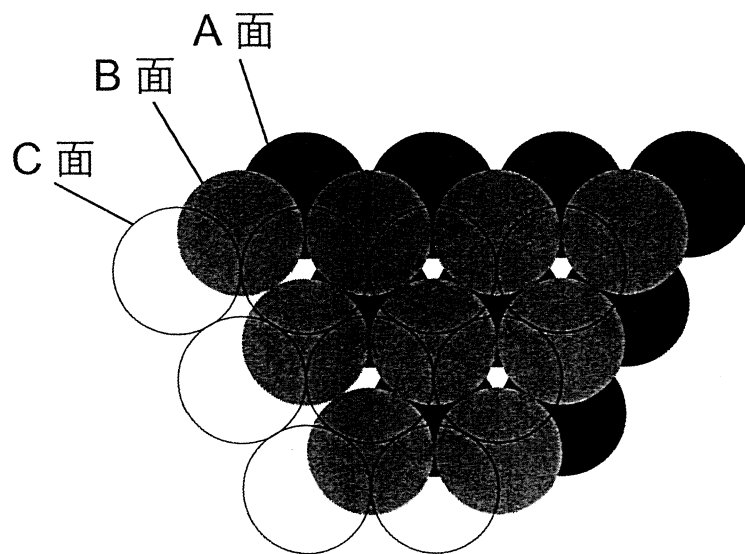
(b) 全電子のスピン固有値 σ_z の和で磁化 M を定義する。 M の熱平衡期待値の式を表せ。

II 電子密度 $n \equiv \frac{N}{V}$ を一定に保ちながら V を十分に大きくした場合を考える。

- (c) 絶対零度で電子が占有するエネルギーの最大値をフェルミエネルギー ε_F と呼ぶ。 $h = 0$ のとき、 ε_F を n を用いて表せ。
- (d) 微小なエネルギー区間: $\varepsilon < \varepsilon_{\mathbf{k}} < \varepsilon + d\varepsilon$ に入る一電子エネルギー準位の数 $N(\varepsilon)d\varepsilon$ と書いて、 $N(\varepsilon)$ を一電子状態密度と呼ぶ。 $h = 0$ のとき、定数 C を用いて $N(\varepsilon) = C\sqrt{\varepsilon}$ と書けることを示し、定数 C を求めよ。
- (e) 内部エネルギー E を $N(\varepsilon)$ を用いたエネルギー ε による積分の形で表せ。
- (f) 帯磁率 χ を $\chi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{M}{h}$ で定義する。絶対零度における χ の値を $N(\varepsilon)$ を用いて表せ。

6.

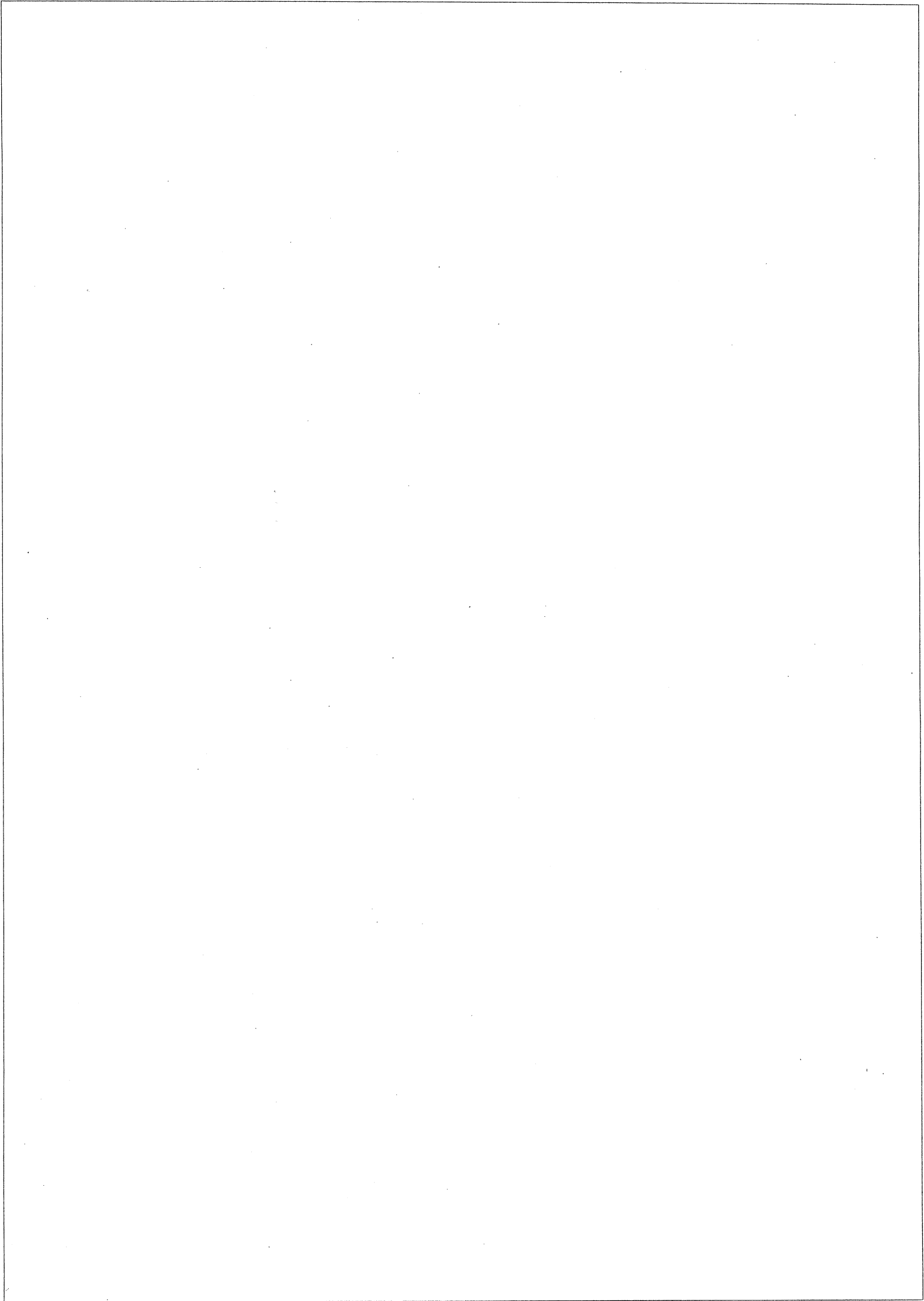
- (a) 格子定数が a の面心立方格子の基本並進ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ を x, y, z 方向の長さが 1 の単位ベクトル $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ を用いて表せ。また面心立方格子の基本単位胞を図示し、図中に $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ を示せ。
- (b) 面心立方格子の逆格子空間における基本ベクトル $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ を求めよ。また逆格子空間における基本単位胞を図示し、図中に $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ を示せ。
- (c) 基本単位胞の体積を V とすると、逆格子空間における基本単位胞の体積は $(2\pi)^3/V$ と表されることを示せ。
- (d) 面心立方構造は図のように半径 a の原子で作られる平面を A-B-C-A-B-C... と層状に積み重ねた構造をしている。面心立方構造の慣用単位胞を A 面、B 面、C 面が分かるように図示し、A 面と B 面の面間隔を a を使って表せ。



- (e) 面心立方構造の充填率を求めよ。
- (f) ダイヤモンド構造はブラベー格子として面心立方格子に分類されることを図を使って説明せよ。

課程	博士前期課程	研究科	自然科学研究科	専攻	物理学専攻	受験番号		氏名	フリガナ	
									漢字	
試験科目	2026年度 物理学			備考	解答用紙			採点欄		

問



解答および解説

第 1 問

(a) 点 x_j ($j \neq i$) にある電荷による電位への寄与は $q_j/(4\pi\epsilon_0 r_{ij})$ であたえられるので,

$$v_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1, \dots, n; j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}}.$$

(b) 点 x_i, x_j にある電荷のペアによる静電エネルギーへの寄与 E_{ij} は,

$$E_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

であたえられる. すべてのペア (i, j) ($i < j$) について E_{ij} を足し上げればよいから, 全静電エネルギーは

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} E_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, \dots, n; j \neq i} E_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \sum_{j=1, \dots, n; j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i v_i \end{aligned}$$

となる.

(c) (a) を用いると,

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 \sum_{i=1}^n q_i v_i' &= \sum_{i=1}^n q_i \sum_{j=1, \dots, n; j \neq i} \frac{q_j'}{r_{ij}} \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n; i \neq j} \frac{q_i q_j'}{r_{ij}} \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n; i \neq j} \frac{q_j q_i'}{r_{ji}} \quad (\because \text{和をとる範囲が } (i, j) \mapsto (j, i) \text{ で不変}) \\ &= \sum_{i=1}^n q_i' \sum_{j=1, \dots, n; j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}} \\ &= 4\pi\epsilon_0 \sum_{j=1}^n q_j' v_j. \end{aligned}$$

(d) 電荷分布について (b) と同様に考えると,

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i$$

となる.

- (e) $\mathbb{R}^3$ から n 個の導体球をのぞいた領域を Σ とし, Σ の境界を $S_1 \cup \cdots \cup S_n$ とする. 各 S_i 上で定数値 V_i をとるような Σ 上の調和関数を ϕ , 各 S_i 上で定数値 V'_i をとるような Σ 上の調和関数を ϕ' とする. 調和関数 ϕ, ϕ' に対して

$$\operatorname{div}(\phi \operatorname{grad} \phi' - \phi' \operatorname{grad} \phi) = \phi \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi' - \phi' \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = 0$$

が成り立つ. これを Σ 上で積分することにより,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Sigma} \operatorname{div}(\phi \operatorname{grad} \phi' - \phi' \operatorname{grad} \phi) dx dy dz \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{S_i} (\phi \operatorname{grad} \phi' - \phi' \operatorname{grad} \phi) dS \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\epsilon_0} (-V_i Q'_i + V'_i Q_i) \end{aligned}$$

がえられる.

第 2 問

- (a) $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -g \cos \alpha$, $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -g \sin \alpha$.
 (b) $eV \sin \beta$.
 (c) $\frac{2}{g \cos \alpha} V \sin \beta$.
 (d) $\frac{2}{g \cos \alpha} v_k$.
 (e) $\frac{2V \sin \beta}{g \cos \alpha} \frac{1}{1-e}$
 (f) (a) の運動方程式を解けば t 秒後の質点の x 座標が求まる. そこに (e) の答えを代入し, $x = 0$ として条件を求めればよい.
 (g) $1 - e = (1 - e^n) \tan \alpha \tan \beta$.

第 3 問

- (a) 電荷分布が球対称なので, 電場の向きは動径方向であり, 電場の大きさは球の中心からの距離 r のみに依存する. 電場の大きさ $E(r)$ は, 閉じた面として半径 r の球の表面を考え, ガウスの法則を用いて求めることができる. 球の中心からの距離 r が R_1 以下のとき, 半径 r の球内にある電荷 $Q_1(r)$ は,

$$Q_1(r) = \int_0^r \rho_0 \frac{r}{R_1} 4\pi r^2 dr = \frac{\pi \rho_0 r^4}{R_1}$$

と求めることができ, $E(r)$ は

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0 R_1} & (r \leq R_1) \\ \frac{\rho_0 R_1^3}{4\epsilon_0 r^2} & (r > R_1) \end{cases}$$

となる。球の中心を座標軸の原点にとると、電場 $\vec{E}(\vec{r})$ は以下となる。

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{4\varepsilon_0 R_1} \vec{r} & (r \leq R_1) \\ \frac{\rho_0 R_1^3}{4\varepsilon_0 r^3} \vec{r} & (r > R_1) \end{cases}$$

- (b) もともと真空であった領域に、無限遠から電荷を少しずつ運んでくることにより、ある電荷分布を作るとする。その過程に必要な仕事が、その電荷分布の静電エネルギーをあたえる。ここでは、問題の電荷分布を中心部分から球殻上に電荷を加えていくときに必要な仕事として静電エネルギーを求める。

半径 r 内にある電荷が作る静電ポテンシャルの、原点から距離 r における点での値を V_r とする。それは

$$V_r = \frac{Q_1(r)}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho_0 r^3}{4\varepsilon_0 R_1}$$

であたえられる。したがって、静電エネルギー U_1 は、

$$U_1 = \int_0^{R_1} V_r \rho_0 \frac{r}{R_1} 4\pi r^2 dr = \frac{\pi \rho_0^2 R_1^5}{7\varepsilon_0}$$

となる。

- (c) 球の中心からの距離 r が R_1 以下の場所の電場は (a) と同じである。 $R_1 < r \leq R_2$ のとき、半径 r の球内の電荷 $Q_2(r)$ は、

$$\begin{aligned} Q_2(r) &= \pi \rho_0 R_1^3 + \frac{4}{3} \pi (-\rho_0) (r^3 - R_1^3) \\ &= \frac{7}{3} \pi \rho_0 R_1^3 - \frac{4}{3} \pi \rho_0 r^3 \end{aligned}$$

なので、ガウスの法則を用いて電場の大きさ $E(r)$ を求めると、

$$E(r) = \frac{\rho_0}{12\varepsilon_0 r^2} (7R_1^3 - 4r^3)$$

となる。 $r > R_2$ のときは、

$$E(r) = \frac{\rho_0}{12\varepsilon_0 r^2} (7R_1^3 - 4R_2^3)$$

と求めることができる。よって、電場 $\vec{E}(\vec{r})$ は以下となる。

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{4\varepsilon_0 R_1} \vec{r} & (r \leq R_1) \\ \frac{\rho_0}{12\varepsilon_0 r^3} (7R_1^3 - 4r^3) \vec{r} & (R_1 < r \leq R_2) \\ \frac{\rho_0}{12\varepsilon_0 r^3} (7R_1^3 - 4R_2^3) \vec{r} & (R_2 < r) \end{cases}$$

- (d) (b) で求めた静電エネルギーに加えて、半径 R_1 から半径 R_2 まで、 $-\rho_0 4\pi r^2 dr$ の電荷を運ぶときの仕事を計算すればよいので、求める静電エネルギー U_2 は、

$$\begin{aligned} U_2 &= U_1 + \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_2(r)}{4\pi\epsilon_0 r} (-\rho_0) 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{\pi\rho_0^2}{\epsilon_0} \left(\frac{4}{15} R_2^5 - \frac{7}{6} R_1^3 R_2^2 + \frac{73}{70} R_1^5 \right). \end{aligned}$$

- (e) $Q_2(R_2) = 0$ を解いて、

$$R_1 = \sqrt[3]{\frac{4}{7}} R_2.$$

- (f) (e) の答えを (d) の答えに代入し、

$$U_2 = \frac{\pi\rho_0^2 R_2^5}{\epsilon_0} \left(-\frac{6}{15} + \frac{146}{245} \left(\frac{4}{7} \right)^{2/3} \right).$$

第 4 問

- (b) $V_0 \uparrow \infty$ では粒子は $0 < x < a$ に閉じ込められる. $n = 1, 2, \dots$ として、エネルギー固有状態は

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), & 0 \leq x \leq a; \\ 0, & x \geq a \end{cases}$$

であり、エネルギー固有値は $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2$ である.

- (c) 波動関数が無限遠で減衰するらめにはエネルギー固有値 E は $0 < E < V_0$ を満たす必要がある. $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, $\theta = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$ とおくと、

$$\varphi(x) = \begin{cases} A \sin(kx), & 0 \leq x \leq a; \\ B e^{-\theta x}, & x \geq a \end{cases}$$

である. ここで、定数 A, B は $\varphi(x)$ と $\varphi'(x)$ が $x = a$ で連続になるように選ぶ. $x = a$ で $\varphi'(x)/\varphi(x)$ が連続であることから

$$\tan(ak) = -\frac{k}{\theta}$$

あるいは、 $v_0 = 2mV_0/\hbar^2$ とすれば、

$$\tan(ak) = -\frac{k}{\sqrt{v_0 - k^2}}$$

という条件が得られる. これを満たす k を用いて、エネルギー固有値は $E = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$ となる.

- (d) エネルギー固有状態の波数 $k > 0$ は、横軸を ak , 縦軸を $y = \tan(ak)$ および $y = -k/\sqrt{v_0 - k^2}$ とした二つのグラフの交点に対応する. v_0 が小さいときには交点がないためエネルギー固有状態（束縛状態）は存在しない. 交点が存在する条件は $a\sqrt{v_0} > \pi/2$, つまり,

$$V_0 > \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2}$$

である.

- (e) 上で述べたグラフの交点の個数を評価すればいいので, エネルギー固有状態の個数は

$$N \sim \frac{a\sqrt{v_0}}{\pi} = \frac{a}{\pi\hbar} \sqrt{2mV_0}$$

である.

第 5 問

- (a) 一粒子固有エネルギーを ε_i として, 大分配関数は

$$Z = \prod_i (1 + e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)})$$

で与えられる.

- (b)

$$M = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \hbar - \mu)} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} + \hbar - \mu)} + 1} \right).$$

- (c)

$$\frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}.$$

- (d) $n = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2} \right)^{3/2}$ を ε で微分すれば良い.

$$C = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2}.$$

- (e)

$$E = \int d\varepsilon N(\varepsilon) \left(\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \hbar - \mu)} + 1} + \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon + \hbar - \mu)} + 1} \right).$$

- (f) $\chi = 2N(\varepsilon_F)$.

第 6 問

- (a) 面心立方格子の基本並進ベクトルは

$$\mathbf{a}_1 = \frac{a}{2}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y), \mathbf{a}_2 = \frac{a}{2}(\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z), \mathbf{a}_3 = \frac{a}{2}(\mathbf{e}_z + \mathbf{e}_x)$$

である. これを図示すると図 1 のようになる.

(b) 逆格子の基本ベクトルを与える式

$$\mathbf{b}_1 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}, \mathbf{b}_2 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}, \mathbf{b}_3 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}$$

に (a) の答えを代入すると、面心立方格子の逆格子の基本ベクトルは以下の通りとなる。

$$\mathbf{b}_1 = \frac{2\pi}{a}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z), \mathbf{b}_2 = \frac{2\pi}{a}(-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z), \mathbf{b}_3 = \frac{2\pi}{a}(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z)$$

これを図示すると図 2 のようになる。

(c) 実格子と逆格子の基本単位胞の体積はそれぞれ $V = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)$, $V' = \mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)$ と与えられる。例えばこれに (a), (b) の答えを代入すると $V = a^3/4$, $V' = 4(2\pi/a)^3$ と得られるので $V' = (2\pi)^3/V$ となる。

(d) 面心立方構造の慣用単位胞は図 3 のように A, B, C 面が積み重なった構造として表すことができる。問題文の図から A, B 面の間隔は 1 辺の長さが $2a$ の正四面体の高さに対応することがわかるので、 $2a\sqrt{2/3}$ となる。

(e) 面心立方構造の単位胞の 1 辺の長さを A とする。単位胞には半径 a の原子が 4 個含まれるので、充填率は

$$4 \times \frac{4\pi a^3}{3} \times \frac{1}{A^3} \times 100$$

となる。これに $A = 4a/\sqrt{2}$ を代入すると、約 74 % となる。

(f) ダイヤモンド構造は、図 4 のように原点 $(0,0,0)$ と $(a/4, a/4, a/4)$ の位置に原子が存在する 1 辺の長さが $a/2$ の立方体でできた基本構造を面心立方格子の格子点上に周期的に配置することで表せる。そのため面心立方格子に分類される。

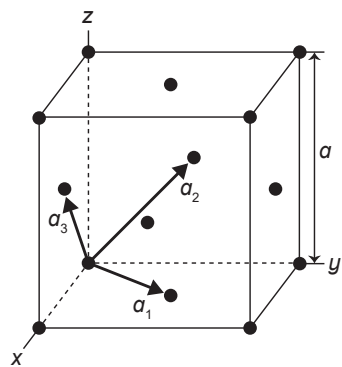


图1

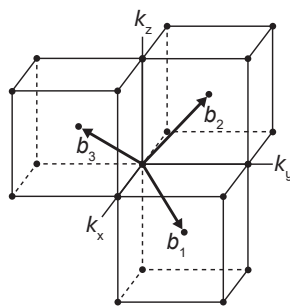


图2

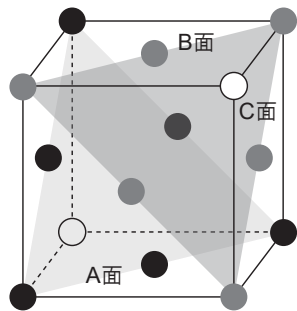


图3

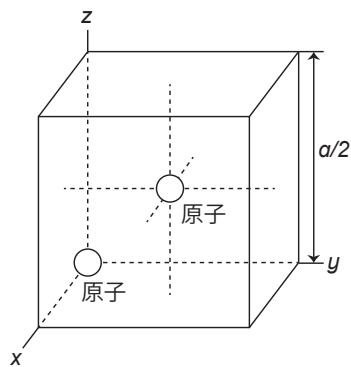


图4

出題の意図

物理学専攻博士前期課程入試（物理学）では、第 1 問は理論物理学全般から、第 2 問は力学分野から、第 3 問は電磁気学分野から、第 4 問は量子力学分野から、第 5 問は熱・統計力学分野から、第 6 問は物性物理学分野から例年出題されてきており、今回もそれに従っています。

第 1 問 古典電磁気学から題材をとりました。ここでは、いくつかの導体を空間に配置したときに、一般的に成り立つ相反則について考えています。2 つの導体球をある間隔で並べた、など特定の配置をあたえるのではなく、 n 個の導体球が一般的な配位をとるようにしています。このように、状況を一般化する習慣をつけておくと、自然法則をより理解しやすくなるでしょう。

前半部分で、有限個の電荷の配位に対する相反則を直接的に導いています。これによって、相反則の主張の内容が理解できるでしょう。後半部分では、導体の配位の場合に拡張できるかどうかをみています。点電荷分布から極限をとることにより、連続的な電荷分布への移行ができればよいですし、ベクトル解析に慣れていれば、最終的な結果は簡潔に導くこともできます。

第 2 問 質点の投射という誰しもなじみのある問題設定だが、斜面に落下するまでの時間や、反発運動を繰り返したときの軌道を考えさせることで、数式への理解の深さを問う設問となることをねらった。反発運動が止まるという状況を考えるためには、式を適切な形に変える必要があり、そこで解答者の計算力を評価している。

第 3 問 球対称に電荷が分布しているときにガウスの法則を用いて電場の大きさを求める基本的な静電場の問題であるが、電荷密度が一定ではなく、球の中心からの距離に比例して電荷密度が変わる設定なので、間違えないように丁寧に計算する必要がある。(b) と (d) の静電エネルギーは、電場の単位体積あたりのエネルギー $\frac{\epsilon_0}{2} E(r)^2$ を全空間で積分して求めることもできる。

第 4 問 1 次元の簡単な設定での定常状態のシュレーディンガー方程式について、エネルギー固有状態（束縛状態）と対応するエネルギー固有値の性質を問う問題である。量子力学の初等的な問題であり、 $x = 0$ での境界条件と $x = a$ での接続条件を的確に処理できるか、また、解の存在や個数が評価できるかをみている。

ちなみに、この問題は標準的な井戸型ポテンシャルのエネルギー固有状態のうち、ポテンシャルの中心での反転について反対称なものだけを考えるのと数学的には等価である。

第 5 問 フェルミ理想気体の基本的な性質を問う問題である。

第 6 問 結晶構造について逆格子を含めて基本的な理解を問う問題である。