

令和 8 (2026) 年度
学習院大学大学院
自然科学研究科 数学専攻
博士前期課程
試験区分 (一般・春期)
入学試験問題

9:00～12:00	13:30～15:00
数学	英語

2026 年度
学習院大学大学院

自然科学研究科 博士前期課程 数学専攻

(春期募集)

入学試験問題

数 学

2026 年 2 月 16 日

次の問題のうち、**1**、**2**には必ず答えなさい。さらに、**3**、 $\dots$ 、**8**から2問選択し、計4問について解答しなさい。

以下では、 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ整数全体の集合、有理数全体の集合、実数全体の集合、複素数全体の集合を表すこととする。

1 n は自然数で A は実数成分の n 次正方行列とする。

(1) A が直交行列によって対角化できれば、 A は対称行列であることを示せ。

(2) $n = 3$ で $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする。 A を直交行列によって対角化せよ。

2 $\mathbb{R}$ 上で定義された C^2 級関数 $f(x)$ は、任意の x に対して $f''(x) \neq 0$ とする。 $x, h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, とするとき、

$$f(x+h) = f(x) + f'(x+\theta h)h, \quad 0 < \theta < 1$$

を満たす θ は、 x と h によって一意に定まることを示せ。また、 x を固定したとき、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$$

を示せ。

3 一般に、自然数 m に対して、 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $x \mapsto \bar{x}$ を自然な全射とし、 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ を m を法とする既約剰余類群 ($\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の可逆元全体が作る乗法群) とする。

いま、整数 a と自然数 n に対して、 $a^{2^n} + 1$ が素数 p の平方で割り切れる (すなわち $p^2 \mid (a^{2^n} + 1)$ が成り立つ) とする。

(1) $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^\times$ における $\bar{a}$ の位数を求めよ。

(2) $p \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$ が成り立つことを示せ。

4 $\zeta = e^{2\pi i/7}$ とし, $\alpha = \zeta + \zeta^{-1}$ とおく.

- (1) α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を求めよ.
- (2) $\alpha^2 - 2$ は α の $\mathbb{Q}$ 上の共役元であることを示せ.
- (3) $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ が正規拡大かそうでないかを答え, その理由を述べよ.

5 以下の定積分を, 複素関数を用いて計算せよ.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 - \pi^2/4} dx$$

6 $y' = \frac{dy(x)}{dx}$ と表すとき, $y = y(x)$ に関する以下の微分方程式を解け.

$$(1) \quad y = xy' - 2e^{y'} \qquad (2) \quad y' = \frac{-y^4 + 4x^3y}{2(x^4 - xy^3)}$$

7

- (1) 弧状連結な位相空間は連結であることを証明せよ. ただし閉区間は連結であることを仮定してよい.
- (2) $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ は連結であることを示せ.

8 I_2 を 2 行 2 列の単位行列とする.

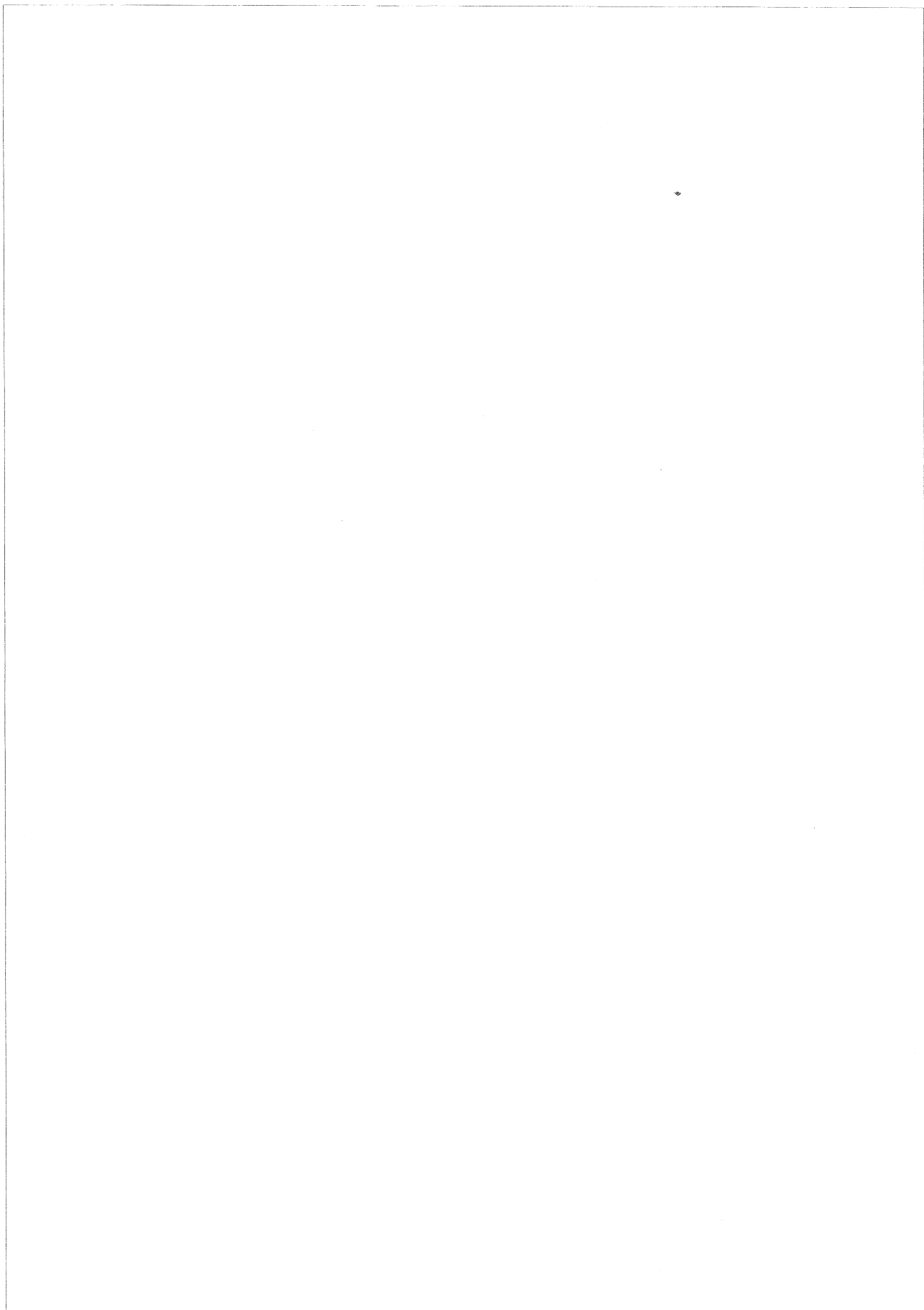
$${}^t A A = I_2$$

をみたす実数を成分にもつ 3 行 2 列の行列 A すべてからなる集合 M は 3 次元多様体であることを示せ. ここで, ${}^t A$ は A の転置行列を表す.

(注意) ・答案は必ず提出すること。 ・太線内は必ず記入すること。

学習院大学大学院

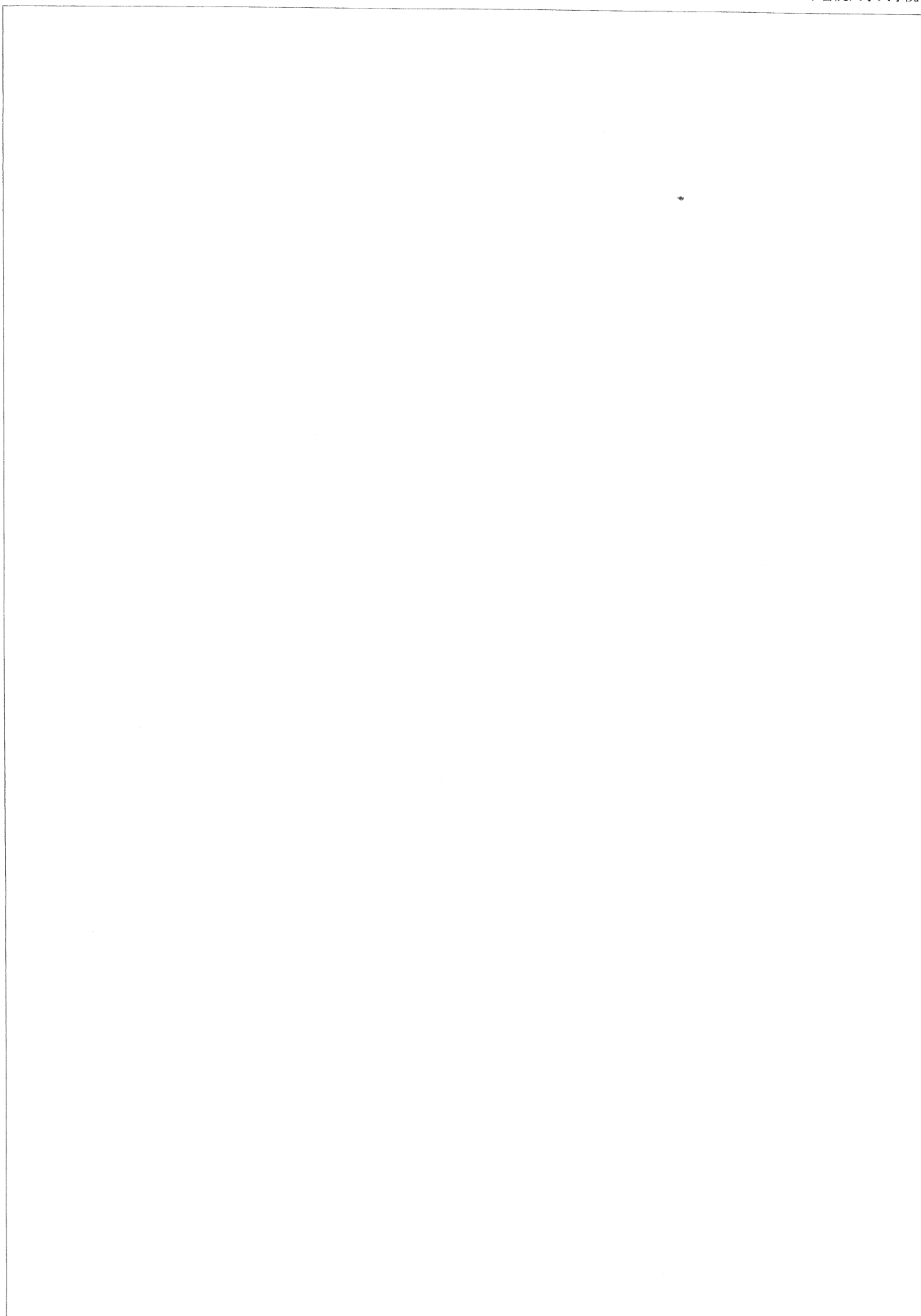
課程	博士前期課程	研究科	自然科学研究科	専攻	数学専攻	受験番号			
試験科目	2026年度 一般入試(春期募集)			備考	解答用紙		採点欄		
	数		学						
問									



(注意) ・答案は必ず提出すること。 ・太線内は必ず記入すること。

学習院大学大学院

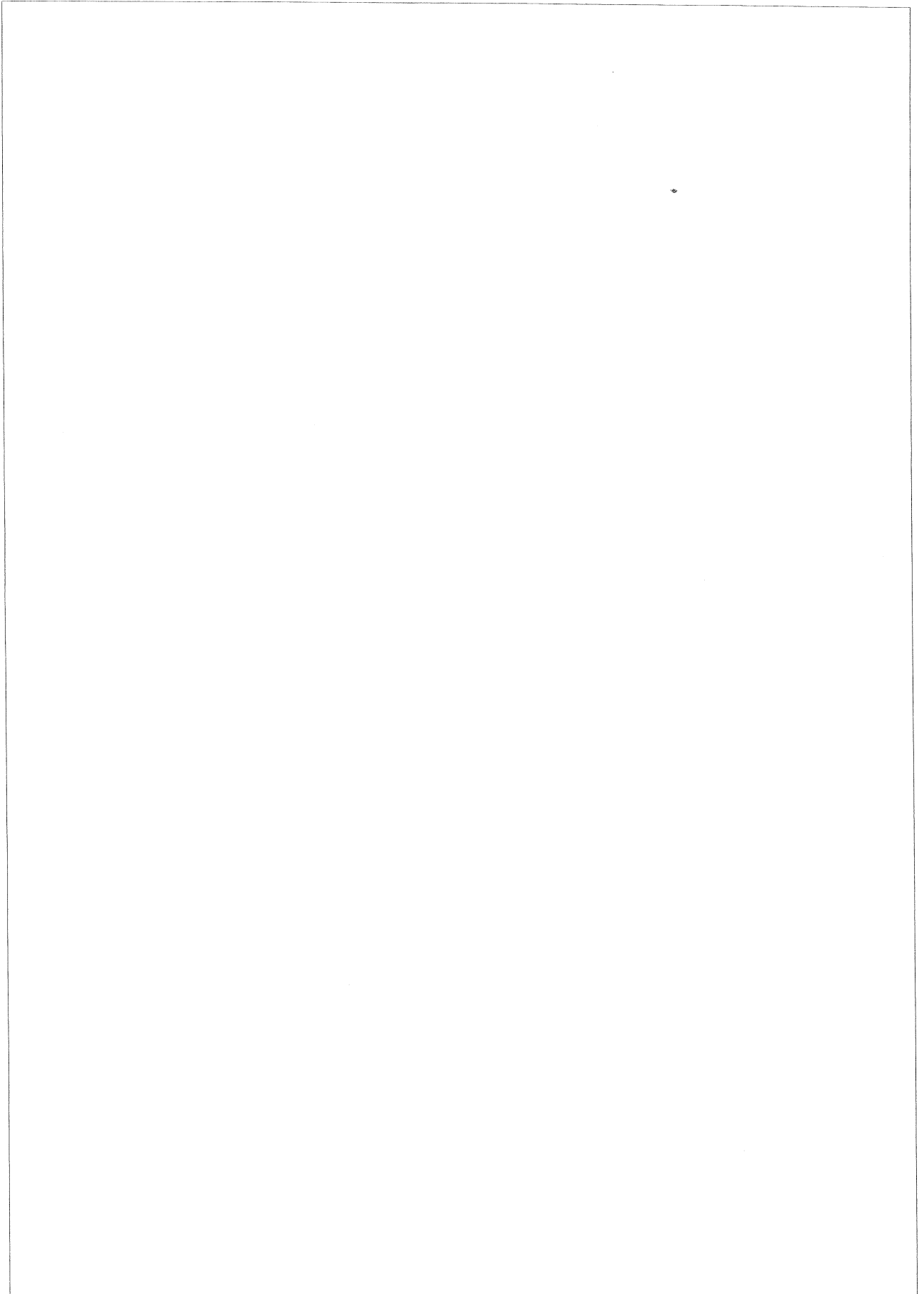
課 程	博士前期課程	研 究 科	自然科学 研究科	専 攻	数学専攻	受験 番号			
試験 科目	2026年度 一般入試(春期募集) 数 学			備 考	解 答 用 紙		採 点 欄		
問									



(注意)・答案は必ず提出すること。・太線内は必ず記入すること。

学習院大学大学院

課程	博士前期課程	研究科	自然科学研究科	専攻	数学専攻	受験番号			
試験科目	2026年度 一般入試(春期募集)			備考	解答用紙		採点欄		
問									



(注意) ・答案は必ず提出すること。 ・太線内は必ず記入すること。

学習院大学大学院

課 程	博士前期課程	研 究 科	自然科学 研究科	専 攻	数学専攻	受験 番号		
試 験 科 目	2026年度 一般入試(春期募集)			備 考	解 答 用 紙		採 点 欄	
問								

