

2026 年度一般選抜（コア試験・プラス試験）

出題ポイント

数 学

出題の意図

学習院大学の一般選抜入試科目「数学」では、募集要項に示した出題範囲に基づき、主として記述式の問題を出題している。記述式問題の解答においては、答えが正しいだけでなく、そこに至る過程が論理的に適切に説明されていることを求める。また、すべての問題において、計算を丁寧に整理しながら、誤りのないよう進めることが重要である。

法学部コア試験・文学部（英語英米文化学科）プラス試験・国際社会科学部プラス試験

解答又は解答例

- 1 (1) $BC = \sqrt{7}$ (2) $BD = \frac{2\sqrt{7}}{5}$ (3) $AD = \frac{6\sqrt{3}}{5}$
 2 (1) $k < -3 - \sqrt{7}$ または $k > -3 + \sqrt{7}$ (2) $1 < a < 4$
 3 $n = 24$
 4 (1) $y = -2ax + a^2 + 1$ (2) $-a \pm \sqrt{2(1+a^2)}$ (3) $-\frac{8}{3} + \frac{4}{3}(2(1+a^2))^{3/2}$

解法と講評

1 (1) $\triangle ABC$ で余弦定理を使えばよい. (2) AD が角 A を二等分しているので $BD : DC = \triangle ABD : \triangle ACD = AB : AC = 2 : 3$. これと (1) から解を得る. (3) D を通り AC に平行な直線と AB の交点を E とする. $BD : BC = DE : AC$ より $DE = \frac{6}{5}$. $\triangle ADE$ は $\angle A = \angle D = 30^\circ$ の 2 等辺三角形より, $AD = \sqrt{3} \times AE = \sqrt{3} \times DE = \frac{6\sqrt{3}}{5}$.

標準的な幾何の問題であり, 8 割程度が正答していた. 上記解法の外, 座標幾何や平面ベクトルを用いた解法などもある.

2 方程式の判別式は $D(k) = k^2 - 4k(a-2) + 4a$. (1) $a = \frac{1}{2}$ のとき, $D(k) = k^2 + 6k + 2$. 方程式が相異なる実数解を持つのは $D(k) > 0$ のときであるから解を得る. (2) (条件) は「すべての k について $D(k) > 0$ 」と言い換えられる. これは $D(k)$ を k についての 2 次式と見たとき, その判別式 Δ が負であるということ. $\Delta/4 = (2(a-2))^2 - 4a < 0$ を解いて解を得る.

(1) 正答率は高かったが, 2 次不等式まで導けているのに, それが解けていない答案も少なからずあった. (2) (1) に引きずられたのだろうか, $\Delta > 0$ としてしまっている答案が多かった. 日ごろから, 式の意味をしっかりと把握する癖を身に付けておきたい.

3 等比数列の和の公式より $S_n = 6 \frac{1-0.9^n}{1-0.9} = 60(1-0.9^n)$. $S_n > 55 \iff 0.9^n < \frac{1}{12} \iff n \log_{10} 0.9 < -\log_{10} 12$ であるが、これに、

$$\log_{10} 0.9 = \log_{10} \frac{9}{10} = \log_{10} 9 - 1 = 2 \log_{10} 3 - 1 = 2(0.477) - 1 = -0.046,$$

$$\log_{10} 12 = \log_{10} 3 + \log_{10} 4 = 0.477 + 2 \log_{10} 2 = 0.477 + 2(0.301) = 1.079$$

を代入すると $n(-0.046) < -1.079$. これを解いて解を得る.

正答率は 4 割程度であった. $n = 23, 25$ などのミスが多かった. 小数計算でミスをしたものもあったろうが、不等式の向きを間違えたものも多かったのではないかと推測している.

4 (1) $0 < a < 1$ ならば $f(a) = 1 - a^2$, $f'(a) = -2a$ なので, $f'(a)(x-a) + f(a) = -2a(x-a) + 1 - a^2 = -2ax + a^2 + 1$. よって解を得る.

(2) C と L は, $-1 < x < 1$ の範囲では他の共有点を持たないから, $y = x^2 - 1$ と L の方程式を連立させて $x^2 - 1 - (-2ax + a^2 + 1) = x^2 + 2ax - (2 + a^2) = 0$. これを解いて解を得る. (3) 求める面積は $\int_{-a-\sqrt{2(1+a^2)}}^{-a+\sqrt{2(1+a^2)}} (x^2 + 2ax - (2 + a^2)) dx - 2 \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx$ に等しい. 最初の積分は $\frac{4}{3}(2(1 + a^2))^{3/2}$, 2 番目の積分 $\int_{-1}^1 (1 - x^2) dx$ は $\frac{4}{3}$ と分かり, 解を得る.

(1), (2) は基本的な問題であり, 正答率は高かった. (3) は上記の解法よりも, 積分区間を分けて地道に計算していく方法が多かったが, 計算が大変でミスしやすいため, その方法で正答に至っているものは極めて少なかった. 上記の方法を採用していた答案は少ないものの, その方が正答率が高かった. しかし, それでも, $\int_{-1}^1 (1 - x^2) dx$ を 2 倍して引かなかったなどのミスが散見された.

- 1 $0 < a \leq 125$
 2 (1) $BC = r\sqrt{4-r^2}$ (2) $r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$
 3 (1) $\frac{41}{216}$ (2) $\frac{91}{216}$ (3) $\frac{9}{41}$
 4 (1) $a = 1$ (2) $-\frac{17}{4}$

解法と講評

- 1 真数条件より $a > 0$. 2 次方程式が実数解をもつ条件は判別式 $D = 3 - \log_5 a \geq 0$, すなわち $\log_5 a \leq 3$. よって解を得る.

真数条件を考慮しない間違いが最も多く, 次いで, 実数解条件を判別式 > 0 としてしまった間違いが多かった. 正答率は 3 割程度であった.

- 2 (1) C_1, C_2 それぞれの式 $C_1: x^2 + y^2 = 1, C_2: (x-1)^2 + y^2 = r^2$ の辺々を引くと, $x = 1 - \frac{r^2}{2}$ を得る. これを C_1 の式に代入して $y^2 = r^2\left(1 - \frac{r^2}{4}\right)$ を得る. よって $BC = 2r\sqrt{1 - \frac{r^2}{4}} = r\sqrt{4 - r^2}$. (2) $r \times r\sqrt{4 - r^2} = r^2\sqrt{4 - r^2}$ の最大になる r ($0 < r < 2$) を求める. この 2 乗である $r^4(4 - r^2)$ が最大になる r を求めればよい. $x = r^2, f(x) = x^2(4 - x)$ とおくと, $f'(x) = 8x - 3x^2$ より, 増減表を書いて考えれば, $f(x)$ は $0 < x < 4$ の範囲で $x = \frac{8}{3}$ において最大値を取ることが分かる. よって, 解を得る.

結局, 微分を使って 3 次関数の最大値を求める問題であるが, 図形との融合問題であり, また, 3 次関数に至るまで, 式を 2 乗し変数を置き換える作業を経なくてはならず, 応用力が試される. 満点に近い答案は 1 割ほどであった. (1) の x を求めるところまでしかできていない答案も多かった.

- 3 (1) $X \leq 10$ となるのは, すべての目が 2 以下の場合と, 出た目の組み合わせが $(3, 3, 1), (3, 2, 1), (3, 1, 1), (4, 2, 1), (4, 1, 1), (5, 2, 1), (5, 1, 1), (6, 1, 1)$

の場合なので, その総数は $2^3 + 3 \times 5 + 6 \times 3 = 41$. よって解を得る. (2) X が 5 の倍数にならないのは, どのさいころの目も 5 でないということなので, その確率は $\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$. よって, X が 5 の倍数になる確率は $1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$. (3) (1) のパターンのうち, X が 5 の倍数となるのは $(5, 2, 1), (5, 1, 1)$ なので, その総数は $3 + 6 = 9$. よって, 求める条件付き確率は $\frac{9}{41}$.

多かった間違いのパターンは, (1) 数え間違い, (2) 余事象を考えなかったことによる間違い, (3) 単なる数え間違いか, 条件付き確率の理解不足による間違い, と考えられる. (1) では, 41 を 40 としている間違いが多かったが, 上記の解答のように, 系統立てて数え上げれば, そのようなミスは防げるであろう. (2) に影響を受け (3) を間違えているものは, 条件付き確率の理解が十分でないと言える.

4 (1) $f(x) = 0$ の解は $\frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8a}}{2}$. よって $y = f(x)$ のグラフと x 軸が異なる 2 点で交わるとき ($a^2 + 8a > 0$ のとき), 2 交点間の距離は $\sqrt{a^2 + 8a}$. $\sqrt{a^2 + 8a} = 3$ をみたすのは $a = 1, -9$ であるが, $a > 0$ より $a = 1$. (2) $k = 4x + |y|$ とおく. 各 k に対して, この式のグラフ C は, $y = -4x + k (y \geq 0)$ のグラフと $y = 4x - k (y \leq 0)$ のグラフからなる. C は, k が小さくなると左に平行移動していくことに注意する. よって, $y = -4x + k (y \geq 0)$ のグラフと領域 D が共有点を持つ最小の k は, $y = -4x + k (y \geq 0)$ のグラフが $(-1, 0) \in D$ を通るとき $k = -4$ である. また, $y = 4x - k (y \leq 0)$ のグラフと領域 D が共有点を持つ最小の k は, $y = 4x - k (y \leq 0)$ が $y = f(x)$ のグラフに接するときの k である. $-x^2 + x + 2 = 4x - k \iff x^2 + 3x - (2 + k) = 0$ が重解を持つのは, $3^2 + 4(2 + k) = 0 \iff k = -\frac{17}{4}$ のときで, 接点は $(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{4})$ であり, y 座標が確かに負であることに注意する. 以上から, 求める k の最小値は, $-\frac{17}{4} < -4$ より $-\frac{17}{4}$.

(2) にまったく手が付けられなかった答案が一定数あり, 満点近い答案はごくわずかだった. (1) 解と係数の関係を用いた答案で, x^2 の係数が -1 であることへの対処を誤って符号ミスをしているものが目立った. (2) $|y|$ の処理に慣れていない答案が多く, $4x + |y| = k$ のグラフ C が逆「く」の字型の折れ線になることを把握できていない答案が目立った. 正しい値に達している答案でも, ほとんどに論証の不備があり, 放物線に接する条件だけで最小値を出し $y \geq 0$ 側との比較がない, あるいは求めた接点が本当に $y < 0$ を満たすかの検証がないものが大半であった. 試験時間中, 時間の余裕がないのであろうが, 少しでも余裕が生まれるよう, 日ごろからしっかり論証する練習をしておくことが望まれる.

- 1 (1) 14 個 (2) $-\frac{18}{7}$
 2 (1) $a < -8$ または $-4 < a < -\frac{8}{3}$ (2) $a = -8$ または $a = -4$ または $a > -\frac{8}{3}$
 3 (1) $\frac{7}{2}$ (2) $P(-\frac{11}{7}, \frac{20}{7})$ (3) $t = -\frac{82}{31}$
 4 (1) $L: y = (3t^2 - \frac{4}{3})x - 2t^3$ (2) $Q(-2t, -8t^3 + \frac{8}{3}t)$ (3) $t = \frac{\sqrt{10}}{6}$ (4) $\frac{25}{48}$

解法と講評

1 (1) 5 の倍数であり、かつ、6 で割って 3 余る最小の自然数は 15 であるので、そのような自然数は $30m + 15 (m \geq 0)$ と書ける。このうち、100 以上 500 以下のものは、 $3 \leq m \leq 16$ を満たすもので 14 個ある。(2) 与えられた式を 2 乗すると $(\cos x + \sin x)^2 = \frac{2}{9} \iff \cos^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{2}{9}$. よって、 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ より $\sin x \cos x = -\frac{7}{18}$. したがって $\tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = -\frac{18}{7}$.

どちらも基本的問題である。それぞれ 7 割程度の正答率であった。(1) は基本的であるが、上記のように系統的な数え方をしないと数え間違いをしやすい。

2 $y = |x|$ とおき、2 次方程式

$$y^2 + ay - 3a - 8 = 0 \quad (*)$$

が 0 以上の解をいくつ持つかを考察する。この方程式の判別式は $D = a^2 + 4(3a + 8) = (a + 4)(a + 8)$ である。(1) 求める条件は、「2 次方程式 (*) が相異なる正の解を 2 つ持つ」である。これは、2 次方程式の実数解条件および解と係数の関係により、 $D > 0$ かつ $-a > 0$ かつ $-3a - 8 > 0$ と言い換えられる。 $D > 0 \iff a < -8$ または $a > -4$ であるので、解を得る。(2) 求める条件は、「2 次方程式 (*) が

(a) 正の重解を持つ、または、

(b) 負の解と正の解を一つずつ持つ」

である。(a) について、(*) が重解を持つのは、 $D = 0 \iff a = -4, -8$ であり、このとき、その重解はいずれの場合も正である。よって、 $a = -4, -8$ は条件を満たす。(b) の条件は、2 次方程式の実数解条件および解と係数の関係により、 $D > 0$ かつ $-3a - 8 < 0 \iff (a < -8 \text{ または } a > -4)$ かつ $a > -\frac{8}{3} \iff a > -\frac{8}{3}$ である。よって (a), (b) の条件をまとめて解を得る。

満点は 1 割程度であった。絶対値を扱う問題ということで心理的抵抗があったのかもしれないが、落ち着いて考えれば、上記の解答のように、通常の 2 次方程式の解の問題になる。実際は、放物線の問題としてとらえている解答が多かった。その場合、放物線の軸、頂点の位置、 y 切片を的確に扱える必要があるが、そのような答えは少なかった。また、複数の条件が同時に課されるとき、「かつ」、「または」の混乱が多数見受けられた。

□3 (1) $\frac{1}{2}|1 \cdot 3 - 2 \cdot (-2)| = \frac{7}{2}$. (2) (1)の結果と $\triangle OAP$ の面積が 3 であるという条件から, $AB : AP = \frac{7}{2} : 3$. よって, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + (3 \div \frac{7}{2})\overrightarrow{AB}$ を計算して解を得る. (3) $\overrightarrow{OP} = (-\frac{11}{7}, \frac{20}{7})$, $\overrightarrow{BQ} = (t+2, -t-3)$ より, 直交条件 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BQ} = 0$ は $-\frac{11}{7}(t+2) + \frac{20}{7}(-t-3) = 0 \iff -31t - 82 = 0 \iff t = -\frac{82}{31}$.

平面ベクトルの標準的問題であったので, (1) はほとんどが正解, (2) は 7 割程度の正答率であったが, (3) は, 様々な計算ミスが見られ, 5 割以下という正答率であった.

□4 $f(x) = x^3 - \frac{4}{3}x$ とおくと $f'(x) = 3x^2 - \frac{4}{3}$ である. (1) 点 $P(t, t^3 - \frac{4}{3}t)$ における接線の傾きは $3t^2 - \frac{4}{3}$ より, 解を得る. (2) L と C の式を連立すると $x^3 - \frac{4}{3}x = (3t^2 - \frac{4}{3})x - 2t^3 \iff x^3 - 3t^2x + 2t^3 = 0 \iff (x-t)^2(x+2t) = 0$. よって, $t > 0$ により, L と C は P 以外の点 $Q(-2t, -8t^3 + \frac{8}{3}t)$ を共有する. (3) 点 Q における曲線 C の接線の傾きは $f'(-2t) = 3(-2t)^2 - \frac{4}{3} = 12t^2 - \frac{4}{3}$ であるので, 直交条件は $(3t^2 - \frac{4}{3})(12t^2 - \frac{4}{3}) = -1$. $u = 3t^2$ と置くと $(u - \frac{4}{3})(4u - \frac{4}{3}) = -1 \iff 4u^2 - \frac{20}{3}u + \frac{25}{9} = 0 \iff (2u - \frac{5}{3})^2 = 0$. したがって $t^2 = \frac{5}{18}$ となるが, $t > 0$ より $t = \frac{\sqrt{10}}{6}$. (4) 求める面積は $S = \int_{-2t}^t (x-t)^2(x+2t)dx$. $v = x-t$ と置換すると, $S = \int_{-3t}^0 v^2(v+3t)dv = \frac{27}{4}t^4$. よって (3) より解を得る.

設問の流れに乗りやすかったのか, (3) までの正答率は高かった. (4) については積分計算のミスが多く, 正答率が下がった. なお, どの問題にも言えることであるが, 最初の方で計算ミスをしてしまうと, それを使ってそのあとの問題を解いていくため, 総得点に大きく響いてしまう. 一つずつ検算して進めていく癖を日ごろから身に付けておきたい.

$$\boxed{1} \quad (1) \frac{3}{5} \quad (2) AB = \sqrt{2} - 1$$

$$\boxed{2} \quad (1) \text{下記の解法を参照} \quad (2) \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\boxed{3} \quad (1) 2e^3 + 1 \quad (2) \pi(5e^3 - 2)$$

$$\boxed{4} \quad z = 1 + i(\sqrt{3} + 1)$$

$\boxed{1}$ (1) $X = 0, 1, 2, 3$, それぞれの値を取る確率を求め, 期待値を計算すると,
 $0 \cdot \frac{4}{7} + 1 \cdot \frac{2}{7} + 2 \cdot \frac{4}{35} + 3 \cdot \frac{1}{35} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5}$. (2) $x = AB$ とおくと, 余弦定理より
 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cos 60^\circ = x^2 + 4 - 2x$. 一方, $AC = 2x + 1$ な
 ので $(2x + 1)^2 = x^2 + 4 - 2x$. これを解き正の解のみ取れば解を得る. このとき,
 三角不等式も満たされる.

(1), (2), いずれも基礎力があれば確実に得点できる問題である分, ここでの
 失点は差がつきやすい. (1) 正答率は 8 割台半ばであった. X の取りうる値を 0
 から 3 まで漏れなく列挙した上で, 求めた確率の総和が 1 になるかを確認すれ
 ば, 列挙漏れや計算ミスを発見しやすい. (2) 正答率は 9 割ほどであった. 答え
 に負の解を入れて間違えている答案が散見されたのは残念である. 解きっぱなし
 にするのではなく, 条件チェックをする癖を日ごろから身に付けておきたい.

$\boxed{2}$

(1) 点 P の座標を $(-p, -\frac{1}{p})$ ($p > 0$) とおく. 放物線 C_1 の点 (s, s^2) における
 C_1 の接線 $y = 2sx - s^2$ が P を通る $\Leftrightarrow -\frac{1}{p} = 2s(-p) - s^2 \Leftrightarrow$

$$s^2 + 2ps - \frac{1}{p} = 0 \quad (*)$$

このような接線が 2 本あるということは, s に関するこの 2 次方程式 (*) が 2 つの
 互いに異なる実数解を持つということであり, それは, その判別式 $D = (2p)^2 + \frac{4}{p}$
 が正であるということ. $p > 0$ により, 確かに $D > 0$ であるので, 点 P を通る
 C_1 の接線は確かにちょうど 2 つあることが示された. (2) (*) の 2 解を s, t とす
 ると, QR の中点の y 座標は $\frac{1}{2}(s^2 + t^2)$ である. 方程式 (*) の解と係数の関係に
 より, $s + t = -2p$, $st = -\frac{1}{p}$ が成り立つので,

$$\frac{1}{2}(s^2 + t^2) = \frac{1}{2}((s + t)^2 - 2st) = 2p^2 + \frac{1}{p}$$

これを $f(p)$ とおくと,

$$f'(p) = 4p - \frac{1}{p^2} = \frac{4p^3 - 1}{p^2}$$

より、増減表を書けば、 $p > 0$ で、 $f(p)$ は $p = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ において最小値 $f(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}) = \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ をとることが分かる。

本問のような記述式の問題では、重要な1つ1つのステップをきちんと説明して解答しなくてはならない。日ごろからそのような癖を身に付けておきたい。(1) 上記の解法が最も多かったが、点Pを通る直線の傾きを文字で置き、その2次方程式の問題として解いているものもあった。散見されたのは、2次方程式(*)に p を掛けると $ps^2 + 2p^2s - 1 = 0$ となるが、これを p に関する2次方程式と見なしてしまい間違えている答案である。記号の多い方程式については、どの記号に関する方程式と考えているのか、しっかり意識する癖を日ごろから身に付けておきたい。(2) $f(p)$ を求めるために、2次方程式(*)の解を代入して計算する方法は、上記の解と係数の関係を用いる方法より計算量が多く、計算間違いを起こしやすい。

3

(1)

$$\int_1^{e^3} \log x \, dx = [x \log x - x]_1^{e^3} = 2e^3 + 1$$

(2)

$$\begin{aligned} \pi \int_1^{e^3} (\log x)^2 \, dx &= \pi \int_1^{e^3} (x)' (\log x)^2 \, dx = \pi ([x(\log x)^2]_1^{e^3} - 2 \int_1^{e^3} \log x \, dx) \\ &= \pi (9e^3 - 2 \int_1^{e^3} \log x \, dx) \quad ((1) \text{ を利用}) \\ &= \pi (5e^3 - 2) \end{aligned}$$

上記の(1)の解答は(2)と関連付けたものを書いておいたが、変数 x で積分したほうが簡単であろう。(1)、(2)ともに受験生には取り組みやすい問題であったはずで、正答率はおおよそ、(1)8割、(2)5割であった。(2)の解答で π を忘れていたものが散見された。

4 Pの表す複素数 w は、ある実数 θ を用いて $2 + (\cos \theta + i \sin \theta)$ と書ける。正三角形 OPQ の頂点 Q は、辺 OP の上側か下側のどちらかにあるが、Qの表す複素数 z の虚部の最大値を求めたいので、Qが辺 OP の上側にあるとしてよい。すると、QはPを反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ 回転させて得られるので、

$$\begin{aligned} z &= (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})w = (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})(2 + (\cos \theta + i \sin \theta)) \\ &= 2(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}) + (\cos(\frac{\pi}{3} + \theta) + i \sin(\frac{\pi}{3} + \theta)) \end{aligned}$$

である。この虚部が最大になるのは、 $\sin(\frac{\pi}{3} + \theta) = 1$ のときで、このとき、 $\cos(\frac{\pi}{3} + \theta) = 0$ であるから、 $z = 1 + i(\sqrt{3} + 1)$ 。

上記がもっとも多かった正答であるが、次のような鮮やかな解答もある。Pの動く円を60度回転すると、 $1 + \sqrt{3}i$ を中心とする半径1の円となるが、Qはこの上を動くので、求める複素数は $1 + \sqrt{3}i + i = 1 + (\sqrt{3} + 1)i$ 。散見された間違いは、いきなり、次のような憶測でQの y 座標が最大になると結論づけているものである。(a) 最大となるのはQが y 軸上に来るとき。(b) 最大となるのはOPの長さが最大となるときなので、このときPは3。(c) 最大となるのは、原点から与えられた円に接線を引きPがその接点になるとき。(d) 最大となるのはPの y 座標が最大になるとき。これらはいずれも勝手な憶測でしかなく間違いである。

解答又は解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \frac{-13+\sqrt{161}}{2} < x < 1 \text{ または } x > 4 \quad (2) x = 2^{\frac{1}{\log_2 3}} \text{ または } 2^{\frac{3}{\log_2 3}}$$

$$\boxed{2} \quad (1) \frac{1}{108} \quad (2) \frac{13}{27} \quad (3) \frac{17}{104}$$

$$\boxed{3} \quad (1) \frac{9}{2} \quad (2) n = 7$$

$$\boxed{4} \quad (1) x = \sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}} \quad (2) \frac{1}{2e}$$

解法と講評

$\boxed{1}$ まず、右辺 ≥ 0 より、左辺 > 0 、よって、

$$x > -2 \quad (*_1)$$

が必要. $(*_1)$ の下で、不等式は

$$(x+2)^2 > |9x-1|+1 \quad (*_2)$$

と同値. 絶対値の中身の符号で場合分けする. $9x-1 \geq 0$ のとき, $(*_2)$ は $x^2 + 4x + 3 > 9x - 1 \iff (x-1)(x-4) > 0 \iff x < 1$ または $x > 4$. したがって $x \geq \frac{1}{9}$ のとき, 求める条件は $\frac{1}{9} \leq x < 1$ または $x > 4$ ($(*_1)$ はこの条件下でいつでも成り立つ). $9x-1 < 0$ のとき, $(*_2)$ は, $x^2 + 4x + 3 > 1 - 9x \iff x^2 + 13x + 2 > 0 \iff x < \frac{-13-\sqrt{161}}{2}$ または $x > \frac{-13+\sqrt{161}}{2}$. $(*_1)$ を考慮すると, $x < \frac{1}{9}$ のとき, 求める条件は $\frac{-13+\sqrt{161}}{2} < x < \frac{1}{9}$ となる. 以上をまとめると, 解を得る. (2) $a := \log_2 x$ と置くと, $\log_3(x^4) = \frac{4a}{\log_2 3}$ であるので, 等式は

$$\begin{aligned} a^2 - \frac{4}{\log_2 3} a + \frac{3}{(\log_2 3)^2} = 0 &\iff \left(a - \frac{1}{\log_2 3}\right) \left(a - \frac{3}{\log_2 3}\right) = 0 \\ &\iff a = \frac{1}{\log_2 3} \text{ または } \frac{3}{\log_2 3} \end{aligned}$$

よって, 解を得る.

(1), (2) それぞれの満点は2割程度であり, 両方満点は1割程度であった. (1) の間違いは, $(x+2)^2 > |9x-1|+1$ を解いているだけのものや, 2次方程式の解の間違いなどであった. (2) はできる人とできない人の差がはっきり分かれていたようである. なお, 上記以外の解の表示方法もある.

2 (1) まず $c = 1$ でなくてはならないので, $a + 5b = 11$ となる. これを満たす (a, b) は $(6, 1), (1, 2)$ の 2 通り. よって解を得る. (2) $X \geq 111$ は $a + 5b \geq 111 - 25c$ と書き換えられる. $T(c) = 111 - 25c$ と置く. $c = 5, 6$ のとき $T(c) < 0$ より, 任意の a, b に対して $X \geq 111$ が成り立つ. これは $6 \cdot 6 \cdot 2 = 72$ 通りある. また, $a + 5b \leq 6 + 5 \cdot 6 = 36$ より $T(c) \leq 36$ でなくてはならないので, $c \geq 3$ を得る. $c = 3$ のとき $X \geq 111$ を満たすのは, $(a, b) = (6, 6)$ の 1 通り. $c = 4$ のとき, $X \geq 111 \iff a + 5b \geq 11$ である. $a + 5b \leq 10$ となるものを数えると, $a \leq 5, b = 1$ の 5 つのみだから, $a + 5b \geq 11$ となるものは $6 \cdot 6 - 5 = 31$ 通り. 合計は $72 + 1 + 31 = 104$. よって, 解を得る. (3) $X = a + 5b + 25c$ のうち $5b, 25c$ は 5 の倍数なので, X が 5 の倍数 $\iff a = 5$ である. $a = 5$ と置くと $X = 5 + 5b + 25c = 5(1 + b + 5c)$. $X \geq 111$ は

$$1 + b + 5c \geq 23 \iff b + 5c \geq 22 \quad (*)$$

と言い換えられる. 以下, c の値別に条件 $(*)$ を満たす b が何通りあるか調べる. $c = 5, 6$ のときは b は任意となり, $6 \times 2 = 12$ 通り. $c = 3$ のとき, $(*)$ は $b \geq 7$ となるので, そのような b はない. $c = 4$ のとき, 条件 $(*)$ は $b \geq 2$ となり, 5 通りある. よって, 求める条件付確率は, (2) の結果も使うと, $\frac{12+5}{104} = \frac{17}{104}$.

条件を満たす場合の数を丁寧に調べれば解ける問題である. (1) は正答率が高かったが, 条件を満たす (a, b, c) の組で 1 通り, 3 通りという誤答も多少見られた. (2) (3) に影響するのでミスは避けたいところであるが, 条件を満たす (a, b, c) の組で $c = 3$ の 1 通りを見逃すなどの数え上げ間違いが散見された. (3) 正答率は (1), (2) と比べて下がっている. 条件を満たす (a, b, c) の組の数の数え上げミスの他, 「条件付き確率」に触れなかったもの, また, (2) のミスにより, 正答に至らなかったものなどがあった.

3 (1) $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ より

$$\frac{\tan^2(3x)}{1 - \cos 2x} = \frac{\sin^2(3x)}{\cos^2(3x)(1 - \cos 2x)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 3x}{\sin x} \right)^2 \frac{1}{\cos^2(3x)}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin x} = 3, \lim_{x \rightarrow 0} \cos 3x = 1$ を使えば解を得る. (2) 極形式 $1 + \sqrt{3}i = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}), \sqrt{3} + i = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$ を使うと, ド・モアブルの公式により, 等式は, $2^n(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3}) = k2^m(\cos \frac{m\pi}{6} + i \sin \frac{m\pi}{6})$ となる. 両辺の偏角を比較して

$$2n = m + 12\ell \text{ となる整数 } \ell \text{ が存在する} \quad (*_1)$$

を得る. また, 両辺の絶対値を比較して

$$2^n = k2^m \quad (*_2)$$

を得る. $(*)_1$, $(*)_2$ を満たす自然数 k, m と整数 ℓ が存在するような自然数 n の最小値を求める. $(*)_1$ より, m は偶数であることが必要. また, $(*)_2$ により $n \geq m$ が必要であり, よって, $(*)_1$ より, $\ell \geq 1$ が必要. よって, $m = 2, \ell = 1$ のとき, $(*)_1$ の右辺は最小であるが, このとき, $n = 7$ とすれば, $(*)_1$, $(*)_2$ を満たす自然数 k, m と整数 ℓ が確かに存在する ($k = 2^5$). よって, $n = 7$ が最小値.

(1), (2) とともに正答率は低く 1~2 割の間であり, とくに (2) の正答率が低かった. (1) 上記以外にも複数の解答が考えられる. 誤答では, 式変形で係数 2 を忘れたのか 9 が散見された. (2) 誤答では $n = 6$ が目立った. 偏角と絶対値の条件を立てたうえで, k, m の自然数条件を丁寧に絞り込む必要があるが, その詰めが不十分だった可能性がある. 検算は, このようなミスを防ぐのに役立つだろう.

4 (1) $f'(x) = (1 - 3x^2)e^{-x^2} + (x - x^3)(-2x)e^{-x^2} = (2x^4 - 5x^2 + 1)e^{-x^2}$ である. $e^{-x^2} > 0$ なので $f'(x) = 0 \iff 2x^4 - 5x^2 + 1 = 0$. $y = x^2$ と置くと $2y^2 - 5y + 1 = 0 \iff y = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$. $x \geq 0$ なので $x = \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}}$. よって, $f(x)$ の増減表を書けば, $f(x)$ は, $x \geq 0$ において $x = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{17}}{4}}$ で最大値を取ることが分かる. (2) 求める面積は $S = \int_0^1 (x - x^3)e^{-x^2} dx$. 置換 $u = x^2$ を用いると $du = 2x dx$ より $S = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - u)e^{-u} du$. 部分積分を用いれば $\int (1 - u)e^{-u} du = ue^{-u} + C$ より, $S = \frac{1}{2} \left[ue^{-u} \right]_0^1 = \frac{1}{2e}$.

満点に近い答案は 1 割程度であった. (1) 標準的な極値問題であり, きちんと計算できれば正答できる. 半数くらいが正答していた. (2) 面積の計算は置換積分を使わなくても可能であるが, 計算間違いをしやすい. $u = -x^2$ のように置換積分して符号ミスしている人が散見された.

$$\boxed{1} \quad f(x) \text{ の最小値} = -\frac{45}{4}, \quad x = 3$$

$$\boxed{2} \quad (1) 0 < a < \frac{4}{3} \quad (2) \text{ 最大値} = \frac{4\sqrt{3}}{27}, \quad a = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{3} \quad (1) \frac{18}{35} \quad (2) \frac{34}{35}$$

$$\boxed{4} \quad (1) \text{ 最大値} = \frac{1}{2}, \quad (x, y) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ (複号同順)} \quad (2) \text{ 最小値} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}, \\ (x, y) = \left(\pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \right) \text{ (複号同順)}$$

解法と講評

$\boxed{1}$ $f(x)$ を x で微分すると, $f'(x) = x(x+1)(x-3)$ となる. 増減表を書けば, $f(x)$ の最小値は, $f(-1), f(3)$ のどちらかと分かる. $f(x) = \int_0^x (t^3 - 2t^2 - 3t) dt = \left[\frac{t^4}{4} - \frac{2t^3}{3} - \frac{3}{2}t^2 \right]_0^x = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2$ より, $f(-1) = -\frac{7}{12} > f(3) = -\frac{45}{4}$. よって, 解を得る.

微分と積分の関係が理解できていれば, 極めて標準的な問題であるが, 満点と0点が両極化した. また, $x = 3$ のみ正解している答案も少なからずあった.

$\boxed{2}$ (1) C と L の交点の x 座標は, 2次方程式 $x^2 - a = a(x - a) \iff x^2 - ax + (a^2 - a) = 0$ の解. この2次方程式の判別式は $D = a(4 - 3a)$. C と L が2つの交点を持つ条件は $D > 0$ なので, 解を得る. (2) $0 < a < \frac{4}{3}$ のとき, C と L の2交点の x 座標を p, q とすると, 解と係数の関係から $p + q = a, pq = a^2 - a$. よって, C と L とで囲まれる部分の面積は $\frac{1}{6}|p - q|^3 = \frac{1}{6} |(p + q)^2 - 4pq|^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6} D^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6} (a(4 - 3a))^{\frac{3}{2}}$. これが最大になるのは, $a(4 - 3a)$ が最大になるときなので, 解を得る.

(1), (2) を合わせた正答率は3割程度であった. (1) での誤りは, $D > 0$ とすべきところを $D \geq 0$ としているものが多少あり, $D > 0$ という2次不等式は導いているのにそれが解けていないものが少なからずあった. (2) 積分の値を a の式で表せた人はほとんど正答に至っていた.

$\boxed{3}$ 全取り出し方は ${}_7C_4 = 35$ 通り. (1) 白玉2個, 赤玉2個を選ぶ方法は, ${}_3C_2 \cdot {}_4C_2 = 3 \cdot 6 = 18$. よって, 解を得る. (2) 白0個を選ぶ (= 赤4個を選ぶ) 方法は1通り. 従って, 求める確率は $1 - \frac{1}{35} = \frac{34}{35}$.

極めて標準的な問題で9割以上の正答率であった.

$\boxed{4}$ $x = \cos \theta, y = \sin \theta$ とおく. (1) $xy = \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$ であるが, $\sin 2\theta$ の最大値は1より, xy の最大値は $\frac{1}{2}$. $\sin 2\theta = 1 \iff 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (k は整数) より, xy の最大値を与える x, y を得る. (2) $x^2 - xy = \cos^2 \theta - \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta - \sin 2\theta}{2}$ である. $\cos 2\theta - \sin 2\theta = \sqrt{2} \cos(2\theta + \frac{\pi}{4})$ より, $x^2 - xy$ が最小になるのは $\cos(2\theta + \frac{\pi}{4}) = -1$ のとき. よって, $x^2 - xy$ の最小値は上記の解の通り. $\cos(2\theta + \frac{\pi}{4}) = -1 \iff 2\theta + \frac{\pi}{4} = \pi + 2k\pi \iff \theta = \frac{3\pi}{8} + k\pi$ (k は整数) よ

り, $x^2 - xy$ の最小値を与える x, y を得る.

(1) の正答率は 3 割程度であった. 上記の三角関数を使う解法以外の解法もある. 理由を書かずに, 「 $x = y$ のときに最大となるので」という解答があったのは残念である. 記述式の問題では, このような解答は答えの値はあっても正答にはならない. 重要な 1 つ 1 つのステップをきちんと説明して解答できるよう, 日ごろから訓練しておきたい. (2) の正答率は 1 割に満たない. 正答に至っている答案は上記の通り, 三角関数を使ったものに限られていた.

出題の意図

国際文化交流学部の一般選抜入試科目「数学」では、募集要項に示した出題範囲に基づき、今年度は以下の分野に関する理解度を問う問題として記述式問題を含めて出題している。記述式問題の解答においては、答えが正しいだけでなく、そこに至る過程が適切に説明されていることを求め、基本的かつ重要な知識と数学的扱いの技能を確認した。

- 1 データの分析 2 対数関数 3 2次関数 4 数列

解答又は解答例

1

(1)

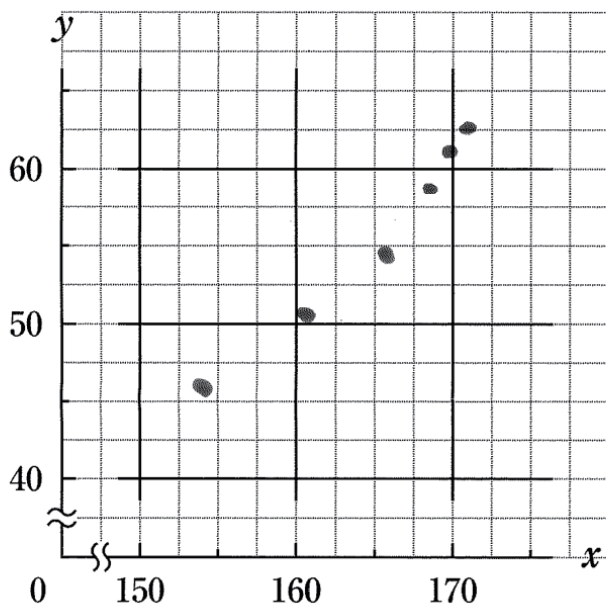
身長 (x) 165.0cm

体重 (y) 55.6kg

(2)

相関係数 (r) = 0.986

(3)



2

ア : 2 イ : 1 ウ : 2 エ : $-\frac{1}{2}$

3

ア：－3 イ：1 ウ：3

4

(1) ア： $4n - 1$

(2) イ： $3 \times 4^{n-1}$

(3)

ウ：3 エ：3 オ：7 カ：12 キ：3 ク：3

ケ：9 コ：48 サ：4

※ウ～クについては別解にも得点を与えている

(4) 計算過程省略

$$S = \left(n - \frac{1}{3}\right) \cdot 4^{n+1} - 4^n + \frac{7}{3} \quad \text{もしくは} \quad \left(4n - \frac{7}{3}\right) \cdot 4^n + \frac{7}{3}$$

出題ポイント

本学部では、出題範囲から満遍なく出題をするようにしている。また、データサイエンスプログラムを設置していることから、その準備となる「データの分析」単元は重視している。